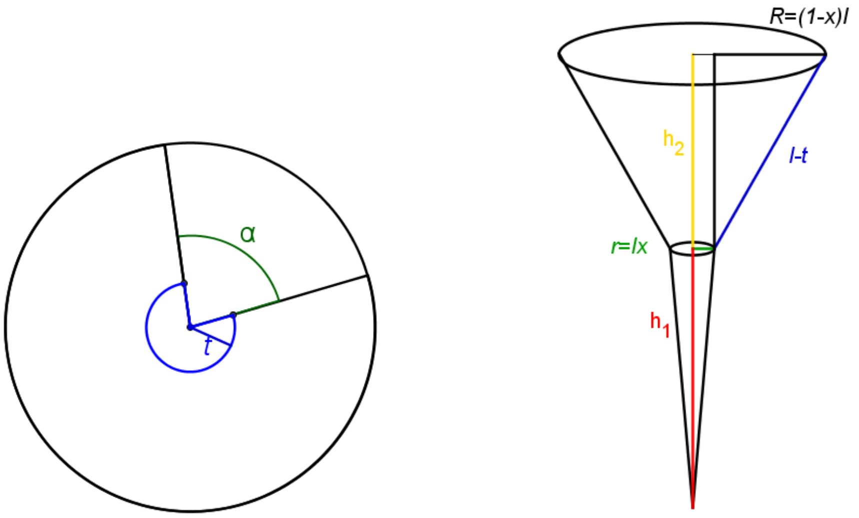
http://cabinet.bg/index.php?contenttype=viewarticle&id=150

От кръг се изрязва сектор с разтвор α (в радиани) и от него се построява конус. Конусът има радиус на основата r, определен от формулата $2\pi r = l\alpha$, където l е радиусът на изходния кръг, от който изрязваме сектора. Т.е. $r = l\frac{\alpha}{2\pi} = lx$, при полагането $x = \frac{\alpha}{2\pi}$.



От остатъка на кръга изрязваме сектор с радиус t, така че след слепване на радиалните срезове да се получи пресечен конус с радиус на долната основа r (за да стане сладоледената фунийка).

Това t се определя от условието $(2\pi - \alpha)t = 2\pi r$, т.е. $t = \frac{2\pi r}{2\pi - \alpha} = \frac{r}{1-x} = \frac{lx}{1-x}$

$R = (1-x)l$ определя се от $2\pi r = (2\pi - \alpha)l$, следователно $R = (1-x)l$

$$h_1^2 = l^2 - r^2 = l^2(1-x^2)$$

Обемът на долния конус е

$$V_1 = \frac{\pi}{3} l^3 x^2 \sqrt{1-x^2}.$$

Височината h_2 на пресечения конус отгоре е

$$h_2^2 = (l-t)^2 - (R-r)^2 = \left(l - \frac{lx}{1-x}\right)^2 - \left((1-x)l - lx\right)^2$$

$$h_2^2 = l^2\left(\frac{(1-2x)^2}{(1-x)^2} - (1-2x)^2\right) = l^2(1-2x)^2\left(\frac{1}{(1-x)^2} - 1\right)$$

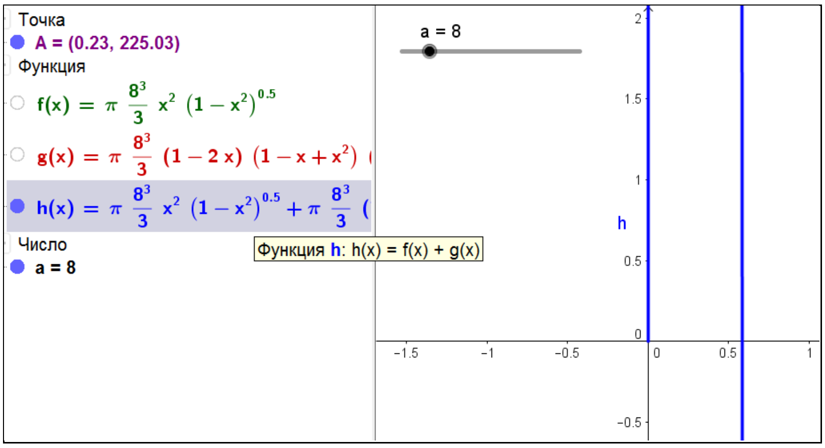
$$h_2^2 = l^2\frac{(1-2x)^2}{(1-x)^2}\left(2x - x^2\right)$$

$$h_2 = \frac{l(1-2x)}{1-x}\sqrt{2x - x^2}$$

Обемът V_2 на горния (пресечен конус) е $V_2 = \frac{\pi}{3}h_2\left(R^2 + Rr + r^2\right)$, където $R = (1-x)l$, $r = lx$, $R^2 + Rr + r^2 = l^2\left((1-x)^2 + (1-x)x + x^2\right) = l^2\left((1-x)^2 + x\right)$.

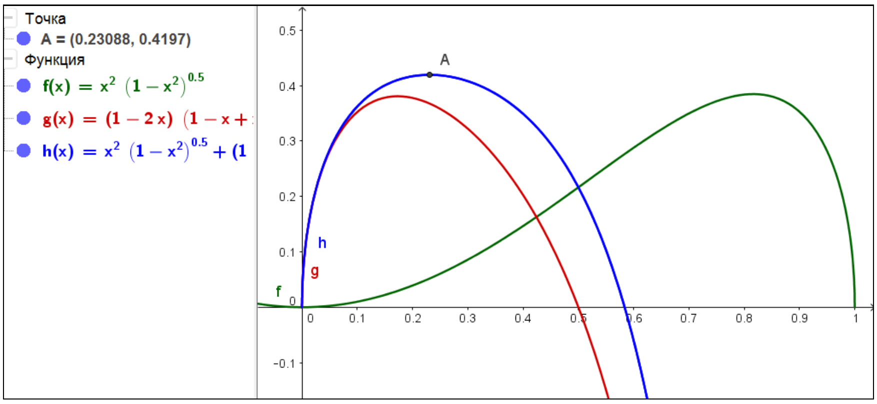
Следователно за обема на пресечения конус получаваме $V_2 = \frac{\pi}{3}l^3\frac{1-2x}{1-x}\sqrt{2x-x^2}\left(1-x+x^2\right)$. Обемът на сладоледената фуника е $V = V_1 + V_2$. Тук ще отбележим, че x може да се мени само между 0 и $\frac{1}{2}$. Това следва от факта, че радиусът $t = \frac{r}{1-x} = \frac{lx}{1-x}$ на изрязаната дъга не може да надвишава l.

Построяваме графиката на $V = V_1 + V_2$ и намираме максимума в интервал $\left(0;\frac{1}{2}\right)$.



http://cabinet.bg/content/bg/html/d22584.html

Отново ще обърнем внимание, че е достатъчно изследването на функцията без коефициента $\frac{\pi}{3}l^3$. При откриване на максималната ѝ стойност в разглеждания интервал, лесно могат да се получат конкретните максимуми, след добавяне на коефициента $\frac{\pi}{3}l^3$.



http://cabinet.bg/content/bg/html/d22585.html

Максималната стойност е 0.4197 и се получава при $x = 0.23088$, което съответства на сектор с ъгъл $\alpha \approx 83.12$ градуса.

За получаване на отговора на задачата трябва да умножим 0.4197 по $\frac{\pi}{3}l^3$ при $l = 8$ см. Резултатът е приблизително равен на 225 кубически сантиметра.