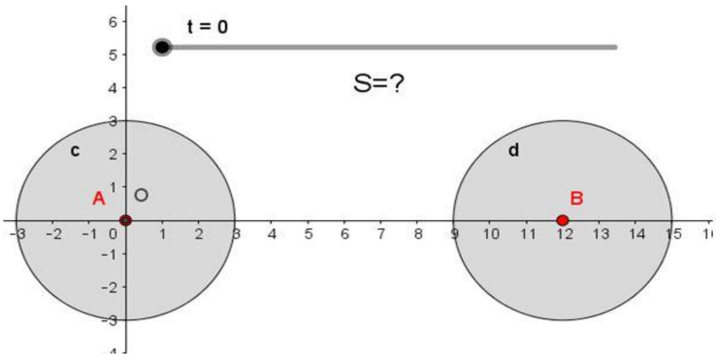
# Решения

## на задачите от Тема за месец ноември 2017 година


**Задача 1.**

Точките A и B са на разстояние 12 cm една от друга. Центърът O на кръг c с радиус 3 cm се движи със скорост 2 cm/sec по по лъча от A към B. Точка B е център на неподвижен кръг d, който също е с радиус 3 cm. В началния момент центърът O се намира в точка A (Фиг. 1).



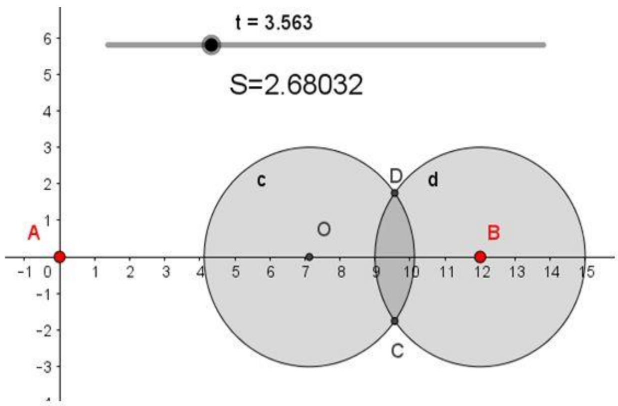

Фиг. 1

След колко секунди общата част на кръговете c и d (Фиг.2) ще бъде 9 квадратни сантиметра:

а) за първи път?

б) за втори път?

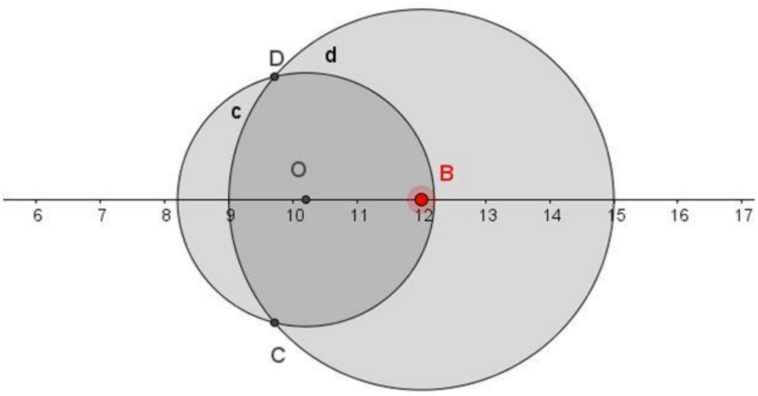
Отговорите се търсят с точност до стотни от секундата.




Фиг. 2

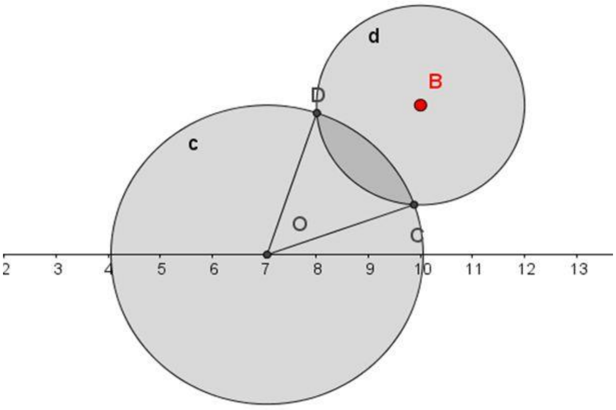
**Задача 2.**
Тази задача е подобна на Задача 1. Разликата е, че радиусът на окръжността с сега е 2 cm. След колко секунди най-рано общата част на кръговете c и d ще бъде 9 квадратни сантиметра (Фиг. 3)? Отговорът се търси с точност до стотни от секундата.

---




Фиг. 3

**Задача 3.**
Центърът O на кръг c с радиус 3 cm се движи по абсцисната ос със скорост 1 cm/sec, тръгвайки от началото A на координатната система. Точка B(10,3) е център на кръг d с радиус 2 cm. След колко секунди най-рано общата част на кръговете c и d ще бъде 3 квадратни сантиметра (Фиг. 4)?



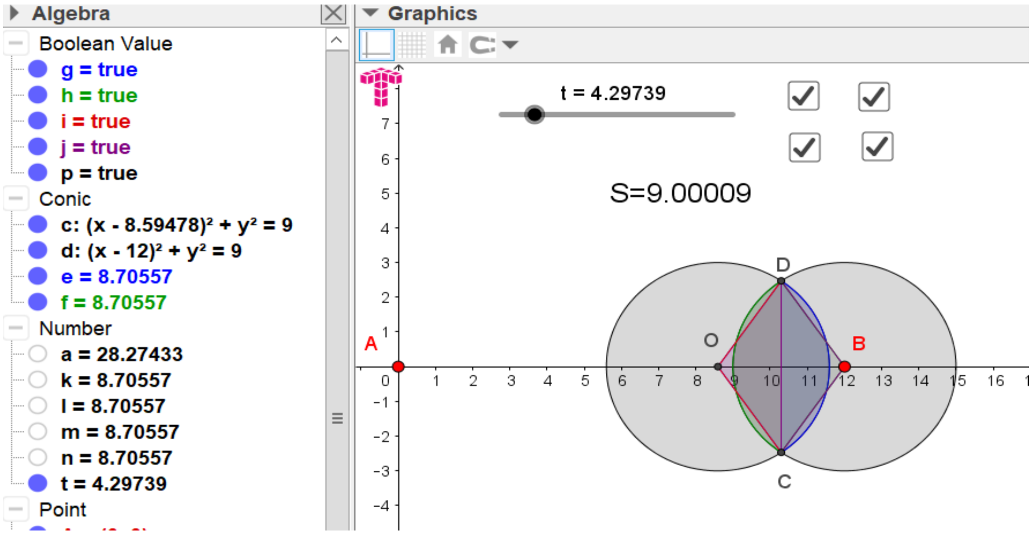

Фиг. 4

**Задача 4.**

Дадена е окръжност k с диаметър AB = 6 cm. Тръгвайки от точка A, центърът O1 на кръг c с радиус 2 cm се движи по окръжността k със скорост 2 cm/sec по посока на часовниковата стрелка. Тръгвайки от точка B, центърът O2 на кръг d с радиус 2 cm осцилира между A и B с постоянна скорост 1 cm/sec. След колко секунди най-рано общата част на кръговете c и d ще бъде 4 квадратни сантиметра? Отговорът се търси с точност до стотни от секундата.

**Решение на задача 1.**

За решаването на тази задача можем да използваме помощния файл, предоставен на участниците [(pomoshten fajl Tema 112017)](). Чрез „нагласяване“ на стойностите t на плъзгача виждаме, че при t = 4.29739 лицето на общата част на двата кръга е S = 9.00009 (Фиг. 5), което е достатъчно добро приближение..




Фиг.5

Следователно, отговорът на задача 1 а), с търсената точност до стотните, е 4.3 секунди. В този момент точката O е „отдалечена“ от B на 1.7 секунди, защото O пристига в B в шестата секунда.

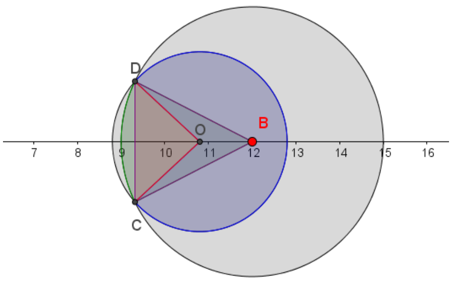
Отговорът на задача 1 в) ще получим, когато точката О застане от другата страна на В на същото „разстояние“ – 1.7 секунди. Следователно, отговорът на задача1 б) е 7.7 секунди.

С тези две задачи са се справили добре почти всички участници в темата на месеца.

Полезно е да разберем как помощният файл „смята“ лицето на общата част на двата кръга. Пресмята се лицето на кръговия сектор OCD ( дъгата е от C към D по посока обратна на часовниковата стрелка) и от това лице се изважда лицето на триъгълника OCD. Остава лицето на кръговия сегмент отдясно на хордата CD. Аналогично се пресмята лицето на другия кръгов сегмент,определен от същата отсечка CD, но разглеждана като хорда в другия кръг (с център в B). Сумата от лицата на двата кръгови сегмента е лицето на общата част на двата кръга.

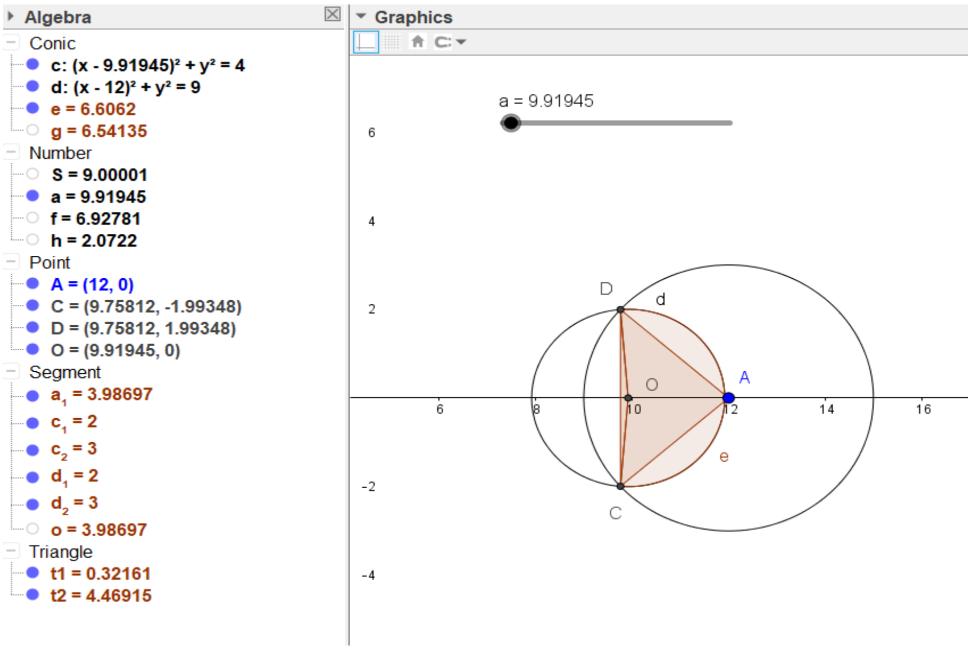
**Решение на задача 2.**

Лицето на кръга c сега е 4π квадратни сантиметра. За да имат двата кръга обща част 9 квадратни сантиметра е твърде възможно центърът О да се окаже надясно от хордата CD (Фиг. 6):




Фиг. 6

Пресмятането на лицето на общата част на двата кръга в този случай е различно. Както личи от Фиг. 6, към лицето на кръговия сектор OCD ( дъгата от C към D пак е по посока обратна на часовниковата стрелка) трябва да се **добави** лицето на триъгълника OCD. Към това лице трябва да се добави лицето на кръговия сегмент, определен от хордата CD на кръга d, който се смята както в предишната задача. Този начин на пресмятане е залегнал в основата на файла [pomoshten fajl zadacha 2](pomoshten fajl zadacha 2). С него намираме, че когато центърът O е в точката (9.91945,0) общото лице S=9,00001 (Fig.7):

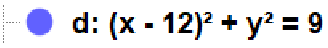



Фиг. 7

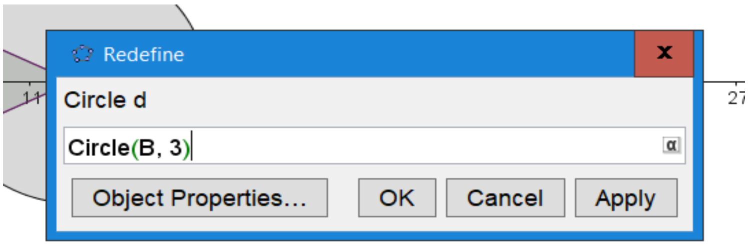
Точката O ще съвпадне с точката (9.91945,0) в момента t = $\frac{9.91945}{2}$ =4.95972. Като отговор на тази задача можем да запишем 4.96 секунди.

Точен отговор на тази задача са дали трима участници. Това са Кирил Митков Цанев, Пламен Тодоров Иванов и Любомир Мартинов Костов. Голям е броят на участниците, които са дали отговор със съвсем задоволителна точност.

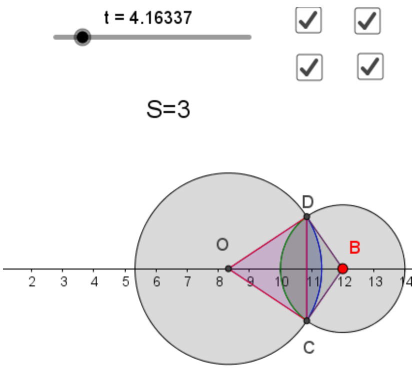
**Решение на задача 3.**

За решаването на тази задача можем да си послужим с видоизменен вариант на помощния файл, предоставен на участниците (pomoshten fajl Tema 112017). В Задача 3 кръгът d има радиус 2 см. Затова най-напред ще изменим помощния файл така, че в него кръгът d да има радиус 2. За целта в алгебричния прозорец на помощния файл щракваме два пъти върху 

. В появяващия се прозорец

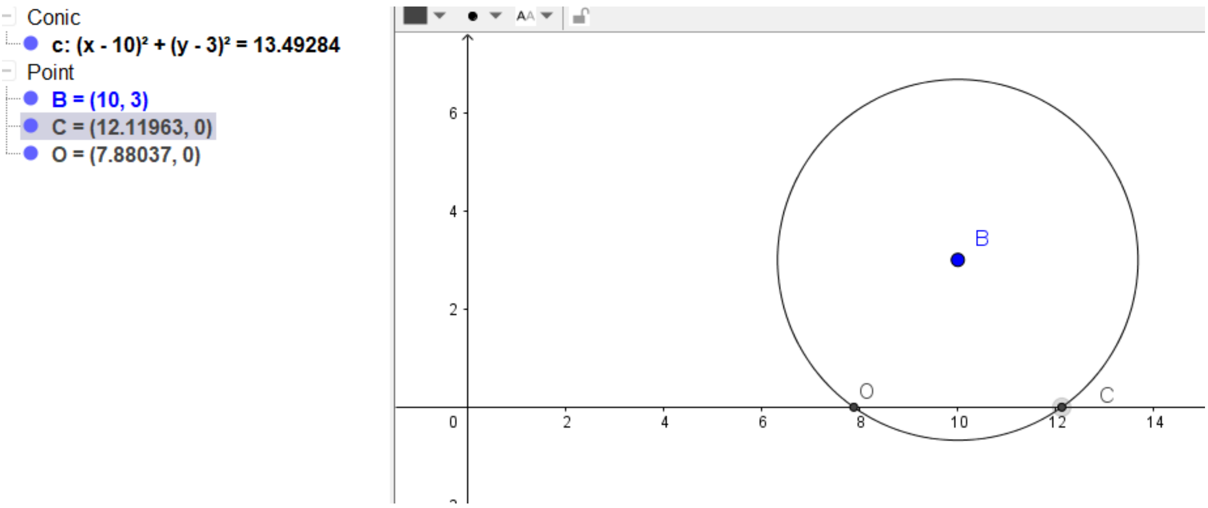



заменяме Circle(B,3) със Circle(B,2) и щракваме последователно върху Apply и OK. Тази малка промяна води до нов файл (pomoshten fajl zadacha 3.ggb), с който можем да експериментираме, както в задача 1 и да намерим такова разположение на кръговете c и d, че общата им част да има лице S = 3 квадратни сантиметра. Това става като дадем на плъзгача стойност t = 4.16337 (Фиг. 8):




Фиг. 8

Разстоянието между центровете O и B на двата кръга на Фиг. 8 е $12 - 2t = 12 - 8.32674 = 3.67326$. Независимо от разположението на двата кръга (вертикално, хоризонтално или наклонено), ако разстоянието между центровете им е $3.67326$, то лицето на общата им част е 3 квадратни сантиметра. Следователно, центърът O на търсения в задача 3 кръг с  лежи едновременно на абсцисната ос и на окръжност с център в B(10,3) и радиус  $3.67326$.  Има две такива точки O и C (Фиг. 9):



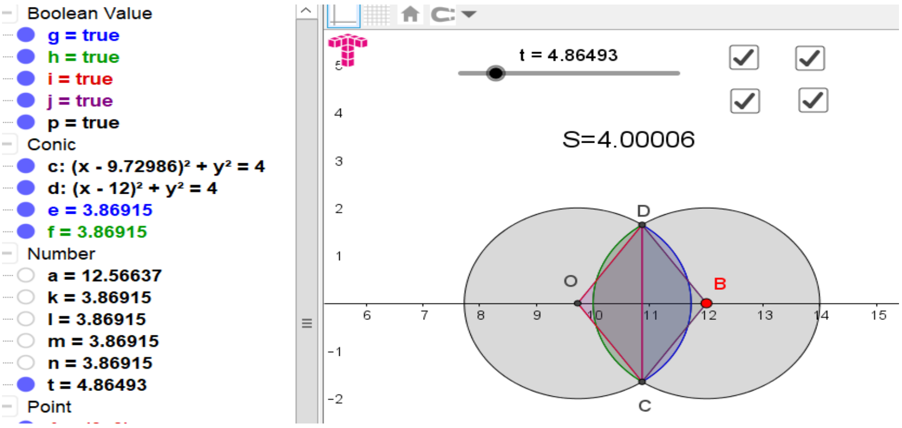

Фиг. 9

Нас ни интересува точката O, която е по-близо до началото на координатната система. Както личи от Фиг. 9, първа координата  на O е 7.88037. Като вземем предвид, че точката O се движи със скорост 1 cm/sec стигаме до извода, че решението на тази задача е 7.88 секунди.

Точен отговор на тази задача са дали Мирослав Желев Димитров, Пламен Тодоров Иванов, Любомир Мартинов Костов, Румен Миленов, Катерина Костадинова Костадинова, Калоян Юлиянов Цветков и Теодор Тодоров Карушков. Много други са посочили приблизително верен отговор.

**Решение на Задача 4.**

Най-напред ще намерим кога два кръга с радиус 2 см имат обща част с лице 4 квадратни сантиметра. Това може да стане като видоизменим допълнително помощния файл в задача 3 и направим в него идвата кръга да са с радиус 2 см. Това става както в задача 3.  Като експериментираме с видоизменения файл pomoshten fajl zadacha 4.ggb виждаме на Фиг. 10, че при t = 4.86493  лицето на общата част е S = 4.00006.

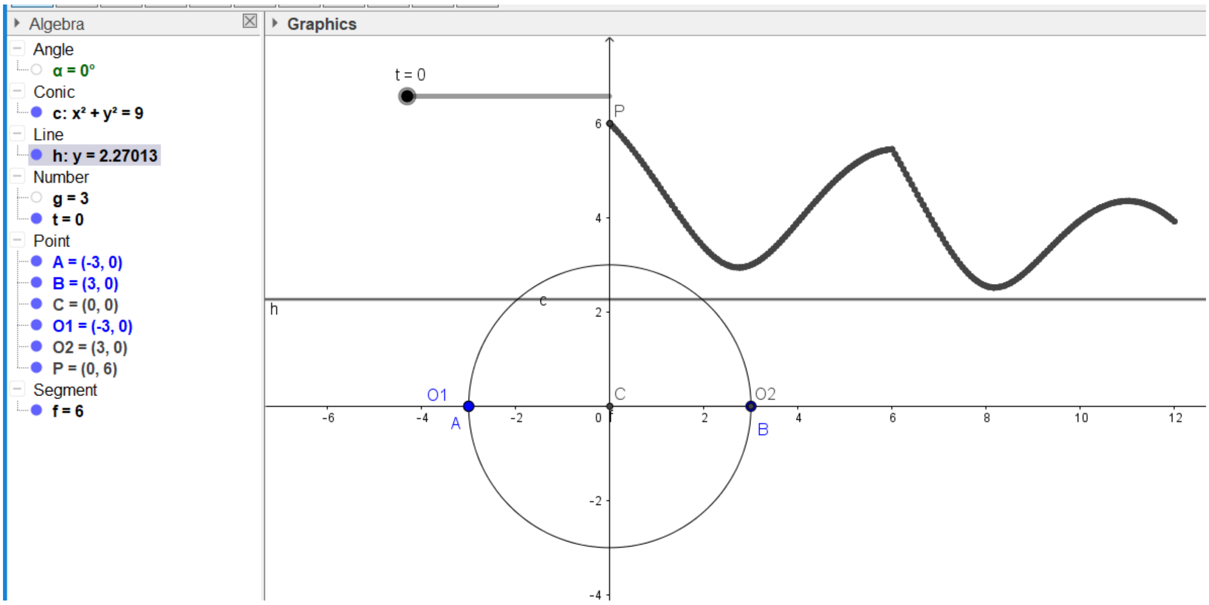



Фиг. 10

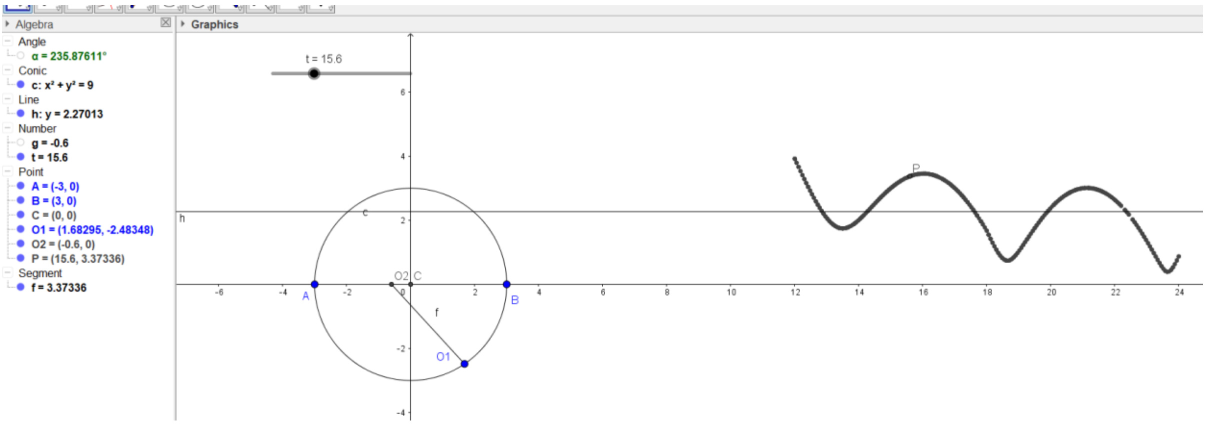
Разстоянието между центровете O и B на двата кръга на Фиг. 10 е $12 - 2t = 2.27013$. Поради това задача 4 може да се преформулира така:

След колко секунди най-рано разстоянието между точките O1 и O2 ще е 2.27013 см?

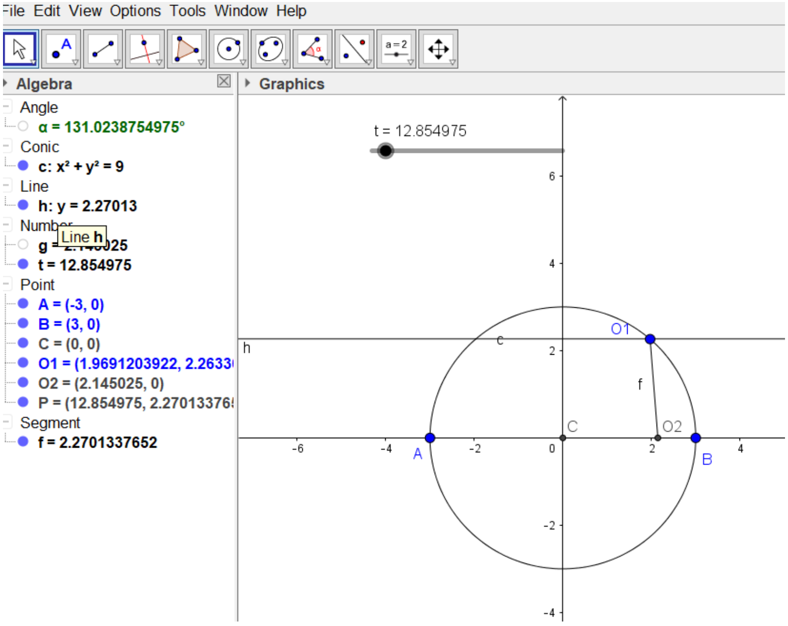
За да изследваме тази задача ще опишем движението на точките O1 и O2 като функция на времето t и ще следим разстоянието между тях. Окръжността k ще считаме, че е с център в началото на координатната система, а точките A и B ще са пресечните точки на k с абсцисната ос (т.е. A(-3,0) и B(3,0) ). Окръжността k има радиус 3. Следователно нейната дължина е 6π см. На кръгов сектор с разтвор α° от тази окръжност ще съответства дъга с дължина $\frac{\alpha}{360}6\pi = \frac{\alpha}{60}\pi$ сантиметра. За да преценим какъв ъгъл α (в градуси) съответства на 2 см трябва да решим спрямо α уравнението $\frac{\alpha}{60}\pi = 2$. Т.е. α = $\frac{120}{\pi}$. Следователно, положението на точката O1 в момента t може да се намери като се завърти точката A около центъра C на окръжността k на ъгъл tα по посока на часовата стрелка.  Определянето на положението на точката O2 се улеснява от това, че тя е разположена върху абсцисната ос (втората и координата е нула). От друга страна, описването на осцилиращото движение на O2 между A и B е известно предизвикателство. Тук ще възприемем един прост подход, като най-напред ще изследваме какво става в първите 12 секунди. В този времеви интервал първата координата на точката O2 в момента t  има стойност $|t - 6| - 3$  (убедете се в това сами). Тези разсъждения са въплътени във файла (wtori fajl zadacha 4.ggb). Разстоянието между O1 и O2 е намерено с бутона „Segment“  и е означено с буквата f (Фиг.11). За да проследим графично какви стойности приема числото f можем да проследим движението на точката P(t , f ) като включим опцията „Trace on“  за тази точка. Съответната крива линия е изобразена на Фиг. 11. На същата фигура се вижда и хоризонталната права линия h, всички точки на която имат за втора координата числото 2.27013. Както се вижда, двете линии нямат обща точка и, следователно в първите 12 секунди нямаме решение на нашата задача. Разстоянието между O1 и O2 остава по-голямо от 2.27013. Това ни насочва към проверка на следващия интервал – от 12-та до 24-та секунда. В този интервал първата координата на O2 се задава като функция на времето t  чрез $|t - 18| - 3$  (проверете сами). Съответният файл (treti fajl zadacha 4.ggb) „произвежда“ Фиг. 12. От нея се вижда, че в този времеви отрязък задача 4 има решение и то е около t = 12.8.  С по-внимателно манипулиране със стойностите на плъзгача виждаме, че при t = 12.854975 за f се получава стойност 2.27013 (Фиг. 13). Отговорът на задачата е 12.85. Един от участниците, Любомир Мартинов Костов, е посочил този отговор. Други двама  са посочили като отговор - 12.86, което също е отлично постижение и носи 10 точки. Това са Пламен Тодоров Иванов и Румен Миленов.




Фиг. 11




Фиг. 12



Фиг. 13

**Забележка**: Идеята темата за месец ноември 2017 г. да е посветена на „общата част на два кръга“ е на Тони Чехларова. Нейн е и помощният файл, съпровождащ задача 1. Отговорността за окончателното формулиране на темата, описанието на решенията и подготовката на използваните в решенията файлове е на Петър Кендеров. Логото на темата е направено от Койя Чехларова. Уеб-поддръжката и техническото осигуряване са на Тодор Брънзов и Георги Гачев.