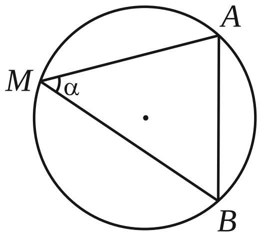
Тема за месец септември 2017 година

Задача 1. Вертикалната отсечка AB е с дължина $6\ cm$ и е хорда в окръжност (Фиг. 1). Известно е, че отсечката AB се вижда под един и същ ъгъл от всяка точка M на окръжността, която е отляво на правата, определена от точките A и B.

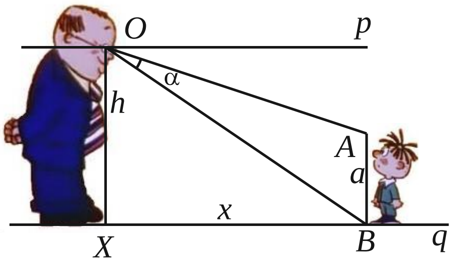


Фиг.1

а) Какъв трябва да е радиусът на окръжността, за да бъде ъгълът AMB равен на 52 градуса? Запишете отговора с точност до стотните.

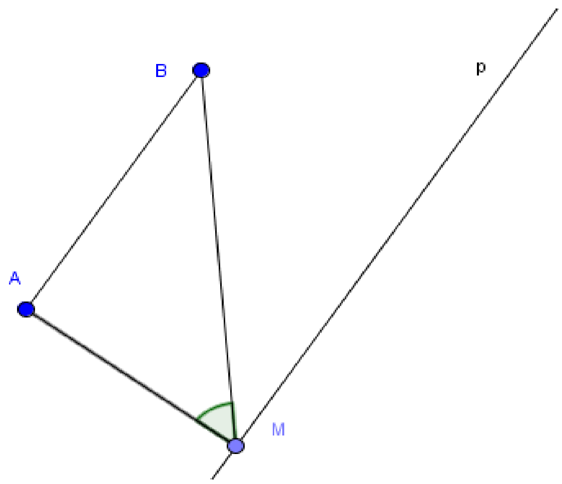
б) Какъв трябва да е радиусът на окръжността, за да бъде ъгълът AMB равен на 123 градуса? Запишете отговора с точност до стотните.

Задача 2. На фигура 2 са изобразени учител и ученик. Височината на ученика е $a = 110\ cm$, а очите на учителя са на височина $h = 180\ cm$. На какво разстояние от ученика трябва да стои учителят, така че да го вижда под най-голям ъгъл (т.е. да го вижда най-добре)? Запишете отговора в cm с точност до стотните.



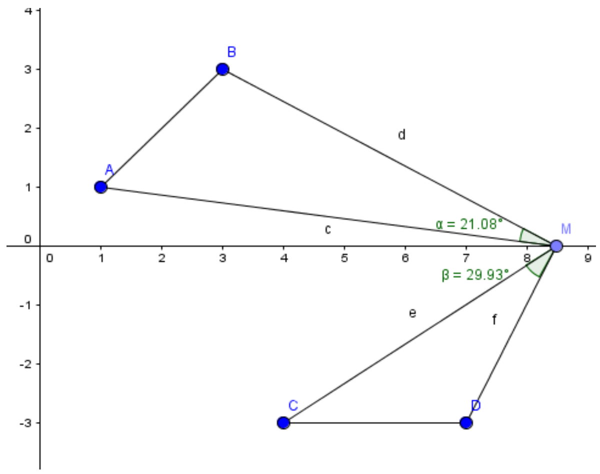
Фиг. 2

Задача 3. Дадени са отсечка AB с дължина $6\ cm$, успоредна на нея права p и точка M от p (Фиг. 3). Известно е, че максималната стойност на ъгъла AMB, когато точката M се движи по правата p, е 28 градуса. На какво разстояние от отсечката AB е правата p? Запишете отговора с в cm с точност до стотните.



Фиг. 3

Задача 4. Отсечките *AB* и *CD* са дадени с краищата си: *A(1,1), B(3,3), C(4, -3), D(7, -3).* Точката *M(x,0)* се движи по абсцисната ос. За коя стойност на x сумата от ъглите α и β (Фиг. 4) е най-голяма? Запишете отговора с точност до стотни.

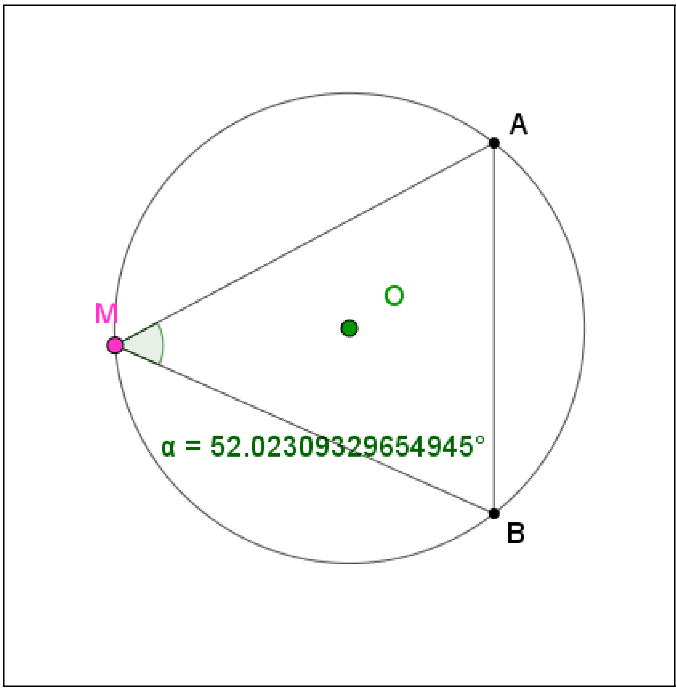


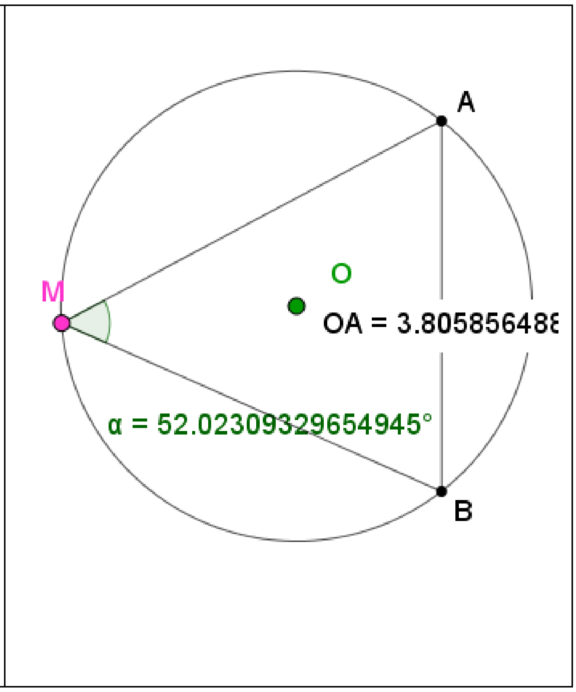
Фиг. 4

Решение на задачите от темата

Задача 1. Помощният файл (Pomoshten_fajl_TM1709_1) ни позволява да намерим търсения радиус експериментално, като движим центъра на окръжността O и подберем за него такова положение, че ъгълът AMB (ъгъл α) да е приблизително равен на 52 градуса. На Фиг. 5 е намерено положение на O, при което α е приблизително равно на 52.023°. Измерваме дължината на отсечката OA (с помощта на бутона 

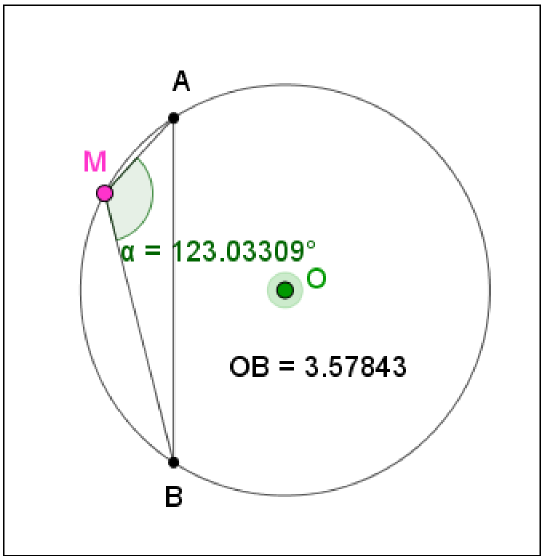
) и намираме, че търсеният радиус е приблизително равен на 3.805856 (Fig.6). Като отговор на задача 1а) можем да запишем 3.81.

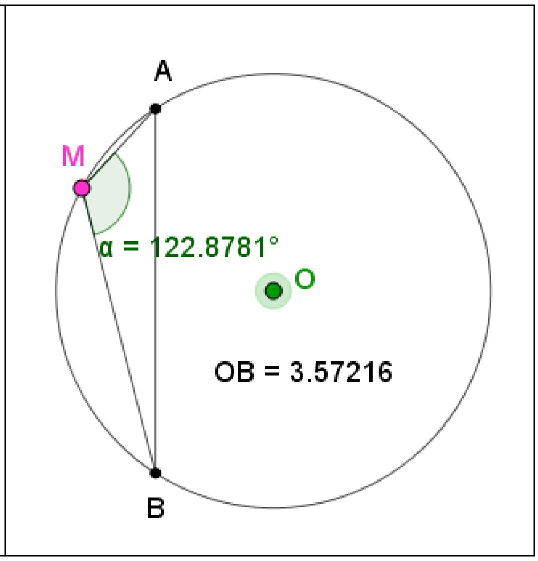




Фиг. 5 Фиг. 6

По същия начин можем да решим и задача 1 б). Движим точка O, за да стане ъгълът AMB близък до 123°. Самата точка O сега ще бъде отдясно на отсечката AB. Достигането на ъгъл 123° е затруднително, затова ще се задоволим с две приблизителни стойности за търсения радиус. Едната стойност (Фиг. 7) е OB=3.57843. Тя съответства

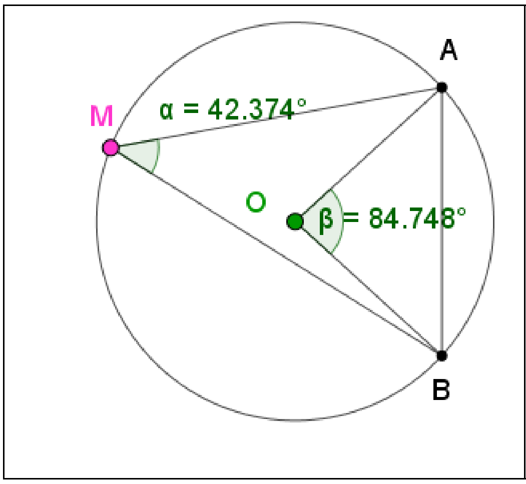




Фиг. 7 Фиг. 8

на ъгъл α=123.03309°, който е малко по-голям от 123°. Другата стойност е OB=3.57216, която съответства на ъгъл α=122.8781°, който е малко по-малък от 123°. Сумата от двете числа за OB, разделена на 2 е 3.575295. Това е едно добро приближение за търсения радиус. След закръгляне до стотните получаваме за отговор на задача 1 б) 3.58.

Задачи 1 а) и 1 б) могат да бъдат решени и без помощния файл, като използваме известния факт, че централният ъгъл AOB е два пъти по-голям от ъгъл AMB (Фиг. 9). Следователно, ако точка C е среда на отсечката AB, то ъгъл AOC е равен на ъгъл AMB (Fig. 10).



Фиг. 9

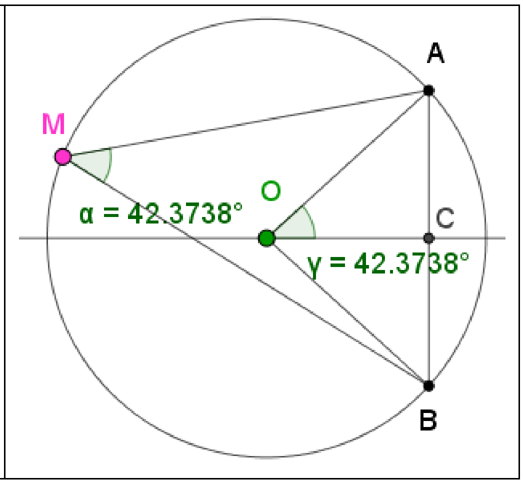
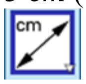
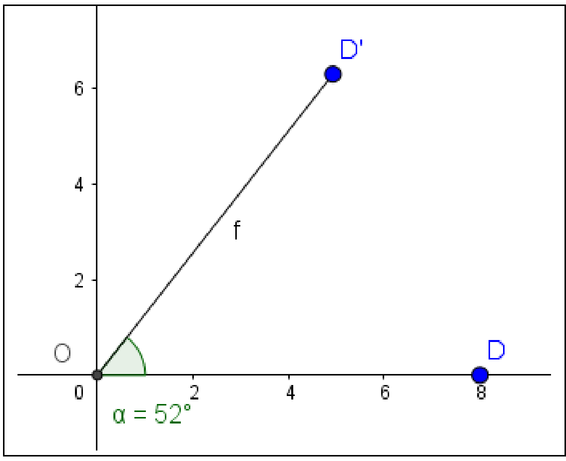


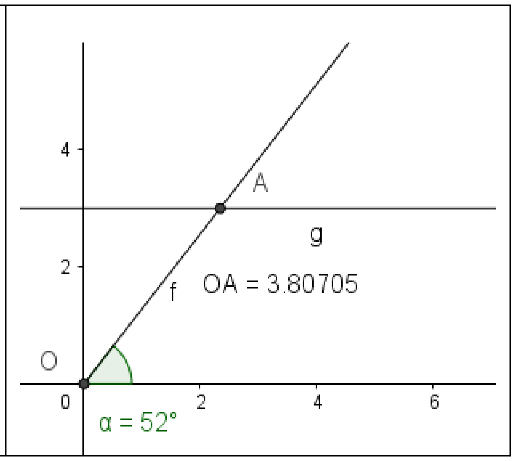
Fig.10

Знаем също, че дължината на AC е 3 *cm*. Тази информация определя напълно правоъгълния триъгълник AOC. С инструментите на ГеоГебра той лесно може да бъде построен. След това, отново с инструмент на ГеоГебра, можем да измерим дължината на страната му OA и да получим отговор на задачата. Ето един възможен начин тази идея да бъде реализирана. Построяваме с помощта на бутона  ъгъл с големина α= 52°, който е с връх в началото на координатната система и едно от рамената му съвпада с абсцисната ос. Второто рамо на ъгъла на Фиг. 11 е означено с f. Прекарваме права g , успоредна на абсцисната ос и отстояща от нея на разстояние 3 *cm* (Фиг. 12). Намираме пресечната точка A на тази права g с f и измерваме с бутона 

разстоянието между точка O и точка A. Получаваме OA=3.80705. След закръгляне до втория знак след десетичната точка, като отговор на задача 1а) отново получаваме 3.81. По аналогичен начин можем да решим и задача 1 б). Единствената разлика е, че вместо с ъгъл α= 52° ще работим с ъгъл α = 57° (който е допълнителен до 180° на ъгъла 123°). Този начин на решаване на задачата е по-точен от предишния, който изисква сръчно боравене с мишката на компютъра.

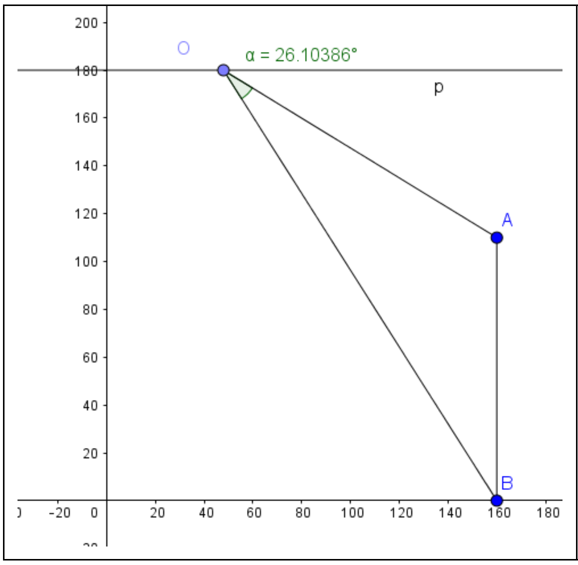


Фиг.11

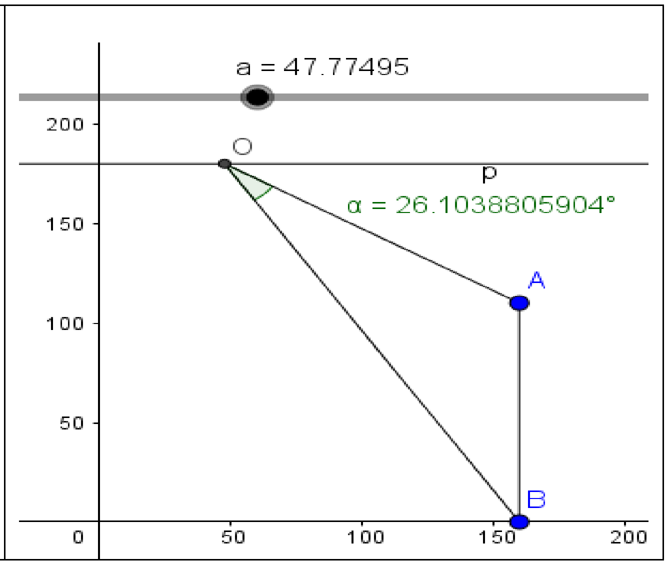


Фиг. 12

Задача 2. Модел на задачата е представен на Фиг. 13. Съответният помощен файл може да се отвори тук (zadacha2file1.ggb). Чрез движение на точката O може да се търси кога ъгълът на виждане на отсечката AB е най-голям. На Фиг. 13 по този начин, като максимален ъгъл е намерен $\alpha = 26.10386°$ **.** В лявата колона на файла (алгебричния изглед на ГеоГебра), като първа координата на точката O виждаме числото 47.90734. За да намерим разстоянието от ученика до учителя, трябва от 160 (мястото на ученика) да извадим 47.90734. Разликата е 112.09266. Това е едно приближение за търсения отговор, но не е ясно дали то е достатъчно добро. Затова, както и в други случаи, когато се стремим към по-добра точност, можем да си послужим с плъзгач за първата координата на точката O. Стъпката на плъзгача ще я направим една хилядна, за да сме сигурни, че ще постигнем желаната точност (до стотните). Новият файл може да бъде отворен тук (zadacha2file2). На Фиг. 14 е показано, че при стойност на плъзгача $a = 47.77495$ се получава ъгъл $\alpha = 26.1038805904°$. За разстоянието от учителя до ученика получаваме 122.2505, което е по-точен отговор от получения по-горе. Като отговор на задачата можем да впишем 122.25.

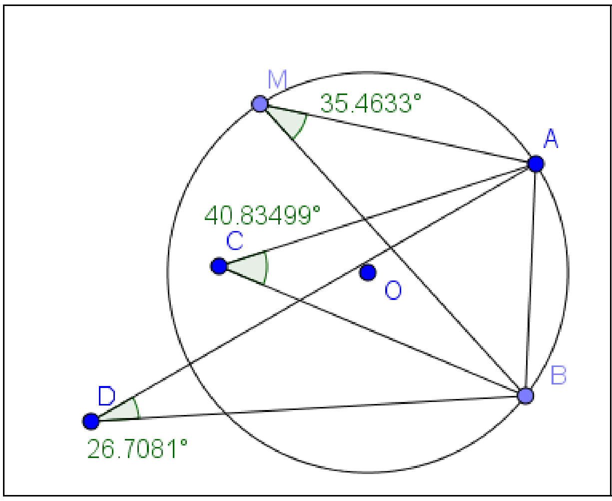


Фиг. 13

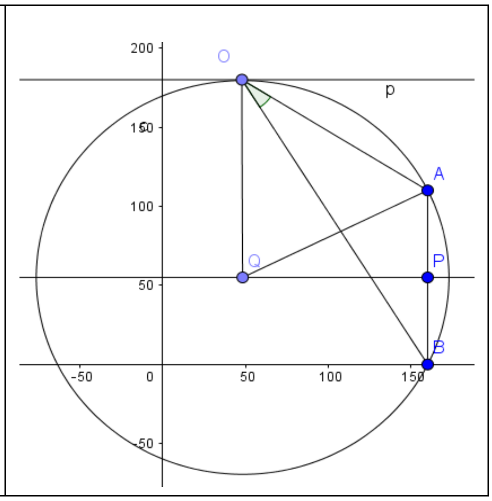


Фиг.14

Задачата може да бъде решена и по друг начин. Експериментирайки с помощния файл (Pomoshten fajl TM1709_1) виждаме, че за всяка вътрешна точка C от кръга, която е отляво на правата през A и B, ъгълът ACB е по-голям от ъгъла AMB. Аналогично, за всяка точка D извън кръга и отляво на правата през A и B ъгълът ADB е по-малък от ъгъл AMB (Фиг. 15). Въоръжени с това наблюдение, се връщаме към задача 2 и означаваме с O „оптималната“ точка от правата p (от O отсечката AB се вижда под най-голям ъгъл). Да разгледаме окръжността, минаваща през точките O, A и B. Ако правата p пресича тази окръжност в още някоя точка (освен O), то тя ще минава през вътрешна точка на кръга и от нея отсечката AB ще се вижда под по-голям ъгъл, което е невъзможно според избора на точка O. Следователно правата p е допирателна за тази окръжност (Фиг. 16). Центърът Q тази окръжност лежи на симетралата на отсечката AB и отсечката QO е перпендикулярна на правата p (Фиг.16). Следователно QO=180 - 55 = 125 cm и отсечката QP е отстоянието от ученика до учителя. От правоъгълния триъгълник QPA и теоремата на Питагор получаваме $QP^2 = QA^2 - AP^2 = 125^2 - 55^2$=12 600. От тук получаваме $QP = \sqrt{12600} = 112.24972 \ldots$. Като отговор можем да запишем 112.25 .



Фиг. 15



Фиг. 16

Задача 3. Без ограничение на общността можем да считаме, че отсечката AB е хоризонтална и лежи на абсцисната ос. По-горе видяхме, че окръжността през точките A, B и M, където M е от p и от нея отсечката AB се вижда под максимален ъгъл, е допирателна към p. Нека Q е център на тази окръжност. Тогава QM е перпендикулярна на p. Освен това Q лежи на симетралата на AB. Значи и M също лежи на симетралата на AB (Фиг.17). Това подсказва как да направим файл, с който да намерим решението. Полагаме A=(-3,0) и B=(3,0). Тогава оптималната точка M ще лежи на ординатната ос и ще има координати (0, a). Правим плъзгач за a със стъпка една хилядна и търсим за коя стойност a на плъзгача ъгълът AMB е равен на 28°. Това число a е разстоянието от p до AB. Този файл може да се отвори тук (zadach3file1.ggb). От Фиг.17 се вижда, че при $a = 12.0323$ ъгълът AMB е 28.0001°. Можем да запишем като отговор на задачата числото 12.03.

Задачата може да бъде решена и по друг начин. Ако началото на координатната система е точка O=(0,0), то правоъгълният триъгълник QBO (Фиг. 18) може да бъде построен, както е описано на стр. 4 (с ъгъл $\alpha = 28°$) и след това страните му да бъдат измерени. Отговорът ще се получи като сума на страните QO и QB=QM.

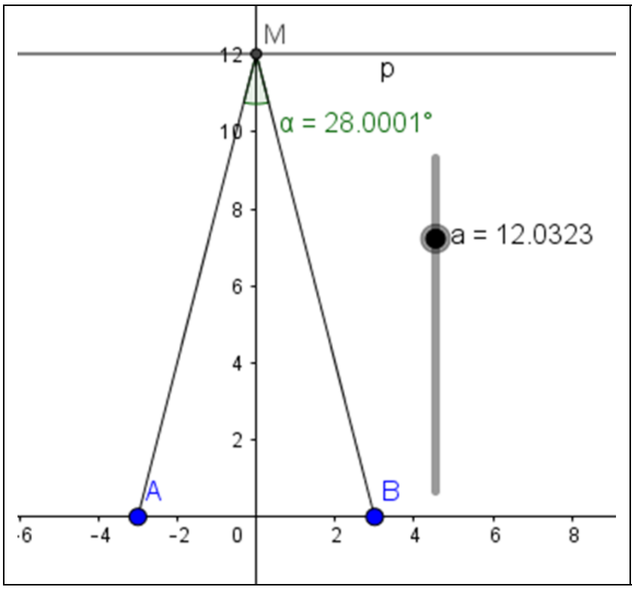


Fig.17

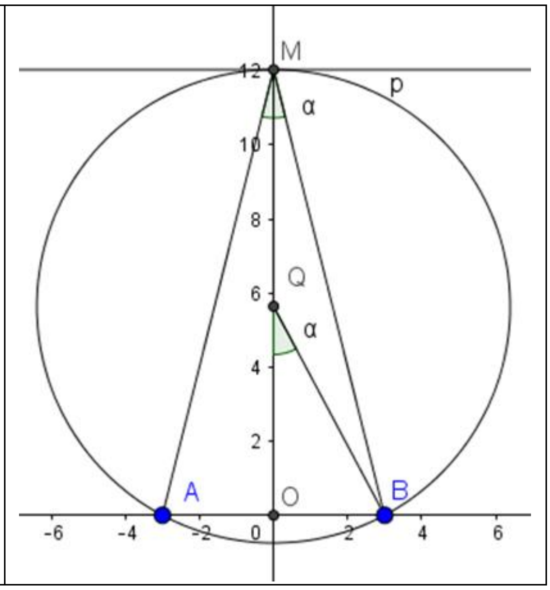
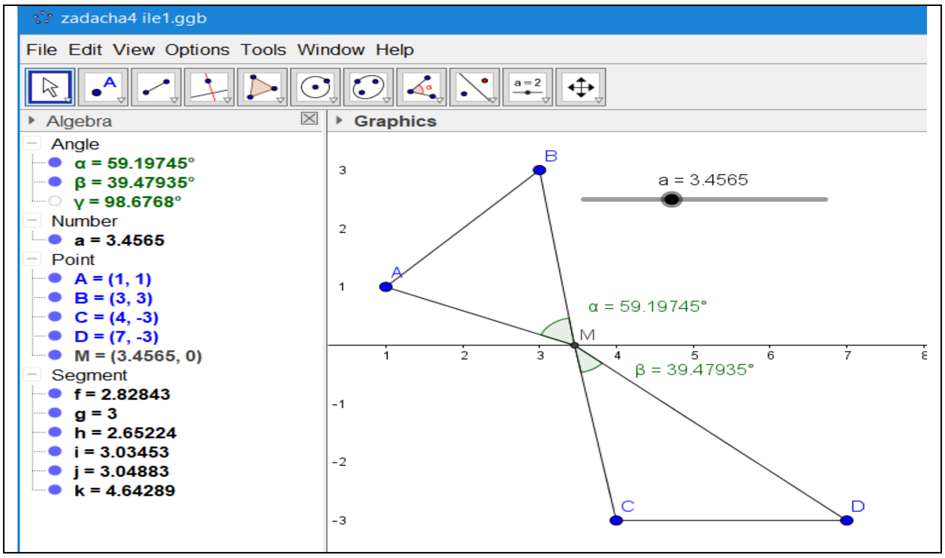


Fig. 18

Задача 4. За изследването на тази задача можем да ползваме следния файл (zadacha4file1.ggb). Зададен е плъзгач с параметър a, който е първата координата на точката M(a,0). Намерени са ъгъл AMB (означен с α) и ъгъл CMD (ознаачен с β). Сумата от двата ъгъла е означена с γ. Търси се най-голямата стойност на γ, когато параметърът a се променя. На Фиг.19 е показано решението. Като отговор на тази задача може да се напише 3.46.



Фиг. 19

Идеята за тази тема е на Кирил Банков. Темата е обсъждана от група в състав Николай Николов, Тони Чехларова и Петър Кендеров. Отговорността за формулирането на цялата тема и описанието на решенията е на П. Кендеров. Помощният файл към задача 1 е направен от Тони Чехларова. Логото на темата е предложено от Койя Чехларова.