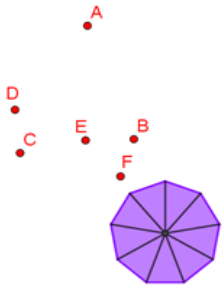
СЪСТЕЗАНИЕ

Viva Математика с компютър 08.12.19 – Тема за 9 и 10 клас

Решения на задачите

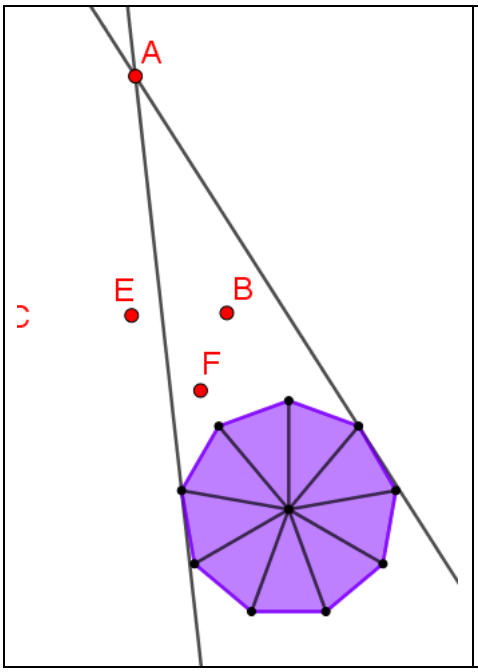
Задача 1

Паметник има форма на правилна деветоъгълна пирамида. На фигурата е показан изглед на паметника отгоре. От кои от точките, които са разположени в равнината на основата на пирамидата, се виждат точно три околни стени на пирамидата?

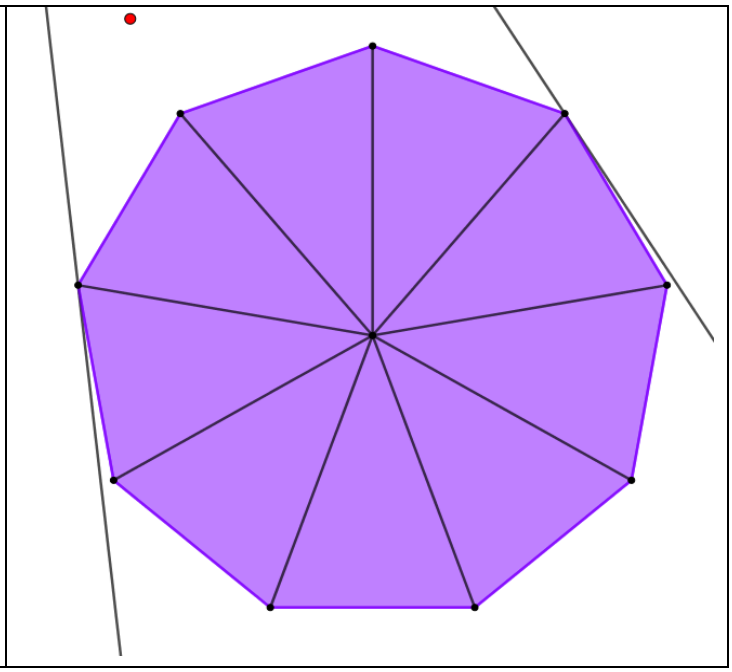


Помощен файл във формат GeoGebra.

Решение: Ще използваме дадения към задачата помощен ГеоГебра-файл. От точка А прекарваме две допирателни към многоъгълника, като използваме бутона (Фиг. 1.1). Наблюдател в точка А вижда три страни на многоъгълника. Могат да се появят съмнения, че някоя от допирателните минава през два върха на многоъгълника (т.е. съдържа негова страна). В такъв случай, възниква въпрос дали и тази страна да се счита за „виждаща се“. Съмненията могат да се отстранят като „раздуем“ картината (при активиран бутон). Резултатът се вижда на Фиг. 1.2. Допирателните не съдържат страна на многоъгълника. Следователно, точка А е решение на задачата. Точно 3 страни на многоъгълника се виждат от т. А. По аналогичен начин проверяваме и останалите точки. Сред тях решения са още точка В и точка С.



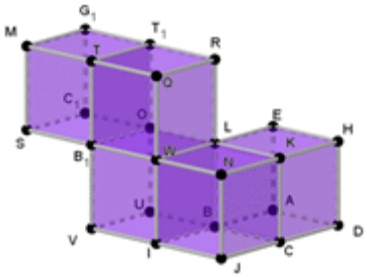
Фиг. 1.1



Фиг. 1.2

Задача 2

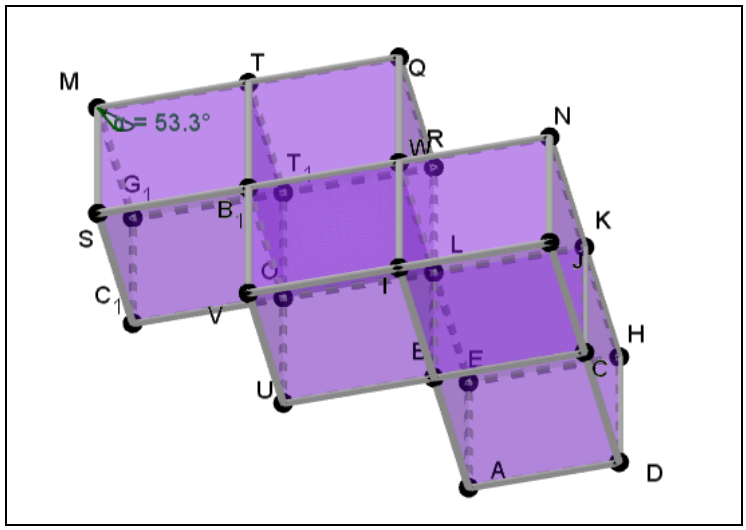
Намерете градусната мярка на ъгъл VMH.



Запишете с точност до десетите.

Помощен файл във формат GeoGebra.

Решение. При активиран бутон за измерване на ъгли в помощния файл, щракваме последователно върху точките V, M и H (в този ред) и получаваме Фиг. 2.1. Наблизо до върха M е изписана градусната мярка на ъгъла VMH. Тя е 53.3°.



Фиг. 2.1

Задача 3

Пресметнете израза $\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}$ и умножете полученото число по π.

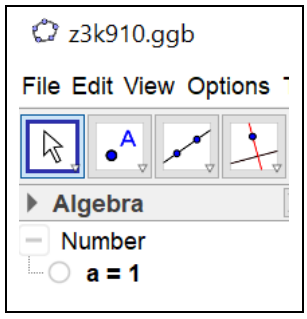
Запишете с точност до стотните

Помощен файл във формат GeoGebra.

Решение. Помощният файл на тази задача е празен. Не съдържа никакви команди и конструкции. В командния му ред (намира се най-отдолу; пред него пише „Input“) записваме командата

sqrt(9 – 4sqrt(5)) + sqrt(14 – 6sqrt(5)).

Така обясняваме на ГеоГебра, че трябва да пресметне числото $\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}$. Изпълнението на тази команда записва като отговор в алгебричния прозорец числото a = 1 (Фиг. 3.1):



Фиг. 3.1

Като умножим резултата по π и вземем само първите две цифри след десетичната точка, получаваме отговора: 3.14.

Забележка. *Това, че* $\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}=1$ *, не следва да ни учудва. Достатъчно е да вземем предвид следните равенства:* $9-4\sqrt{5}=(\sqrt{5}-2)^2$ *и* $14-6\sqrt{5}=(3-\sqrt{5})^2$.

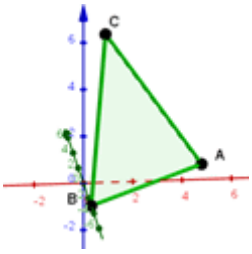
Задача 4

Пресметнете броя на числата, които са по-малки от 500 и са кратни на 3 или на 5.

Решение. Кратните на 3 числа, които са по-малки от 500, се получават, като умножим по 3 всяко от числата от 1 до 166 (значи са общо 166 на брой). Кратните на 5 числа, които са по-малки от 500, се получават, като умножим по 5 всяко от числата от 1 до 99 (значи общо 99 на брой). От сумата 265 на числата 166 и 99 следва да извадим кратните на 15 числа, които са преброени два пъти, защото са кратни и на 3 и на 5. Те са 33. Следователно, отговорът е 265 – 33 = 232.

Задача 5

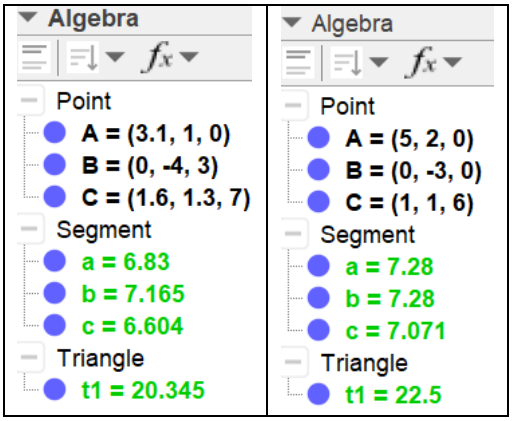
Намерете дължината на медианата от връх C на триъгълник ABC, ако A(5,2,0), B(0,-3,0) и C(1,1,6).



Запишете с точност до десетите.

Помощен файл във формат GeoGebra.

Решение. В помощния файл точките A, B и C са с координати, различни от дадените в задачата (Фиг. 5.1). Първата ни работа е да предефинираме тези точки с правилните координати, съответстващи на условието на задачата. С двойно щракване върху точка A в алгебричния прозорец се открива възможност за редактиране на координатите. След поставяне на новите координати се натиска клавиша „Нов ред“ (Enter) и точката A добива правилните координати. Разбира се, предефинирането на координатите може да стане и от командния ред, като просто запишем в него A = (5, 2, 0). Извършваме тези дейности и с останалите две точки – B и C. Резултатът е виден на Фиг. 5.2.

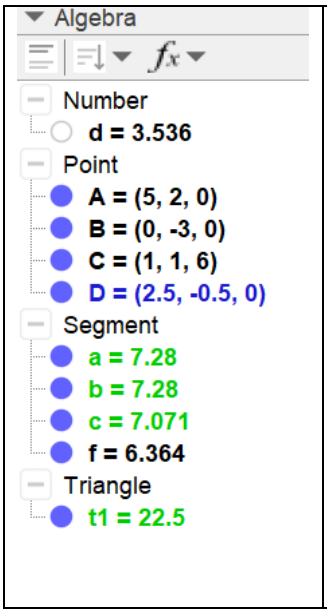


Фиг. 5.1

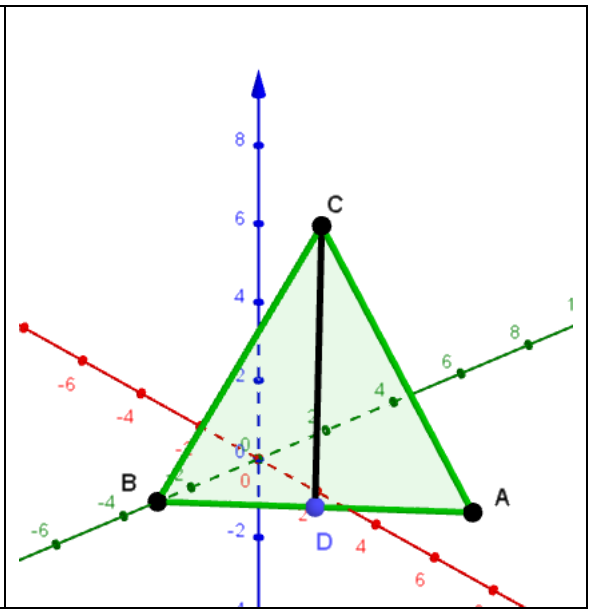
Фиг. 5.2

Задачата ще бъде решена, ако намерим средата D на отсечката AB. Тогава, при активиран бутон и щракване върху т. C и т. D, ГеоГебра автоматично ще построи отсечката CD и ще пресметне дължината ѝ. Има много начини за намиране на точка D. Най-лесният е да използваме бутона , който пресмята тъкмо това - средата на отсечка. След активиране на този бутон и щракване върху т. A и т. B ГеоГебра намира точка D (2.5, -0.5, 0). След използване на ГеоГебра изчислява дължината f = 6.364 на отсечката AD (Фиг. 5.3). Като отговор на задачата следва да се впише числото 6.4 (исканата точност е „до десети“). Тримерен изглед на задачата (и решението ѝ) е даден на Фиг. 5.4.

Забележка. За намиране на средната точка D на отсечката AB може да се възползваме и от известния факт, че тя има за координати средните аритметични на съответните координати на т. A и т. B. Т. е. D (2.5, -0.5, 0).



Фиг. 5.3



Фиг. 5.4

Задача 6

Какъв е остатъкът при деление на 7 на стойността на израза $9^{11} + 11^{9}$?

Решение. В ГеоГебра има команда Mod(a,b), която намира остатъка при деление на цялото число a на числото b. Задаваме в командния ред Mod(9^11 + 11^9, 7) и след изпълнвяане на командата (с клавиша „Нов ред“), ГеоГебра връща отговор 5. Това е отговорът на задачата.

Разбира се, до същия резултат може да се достигне и по традиционния математически път.

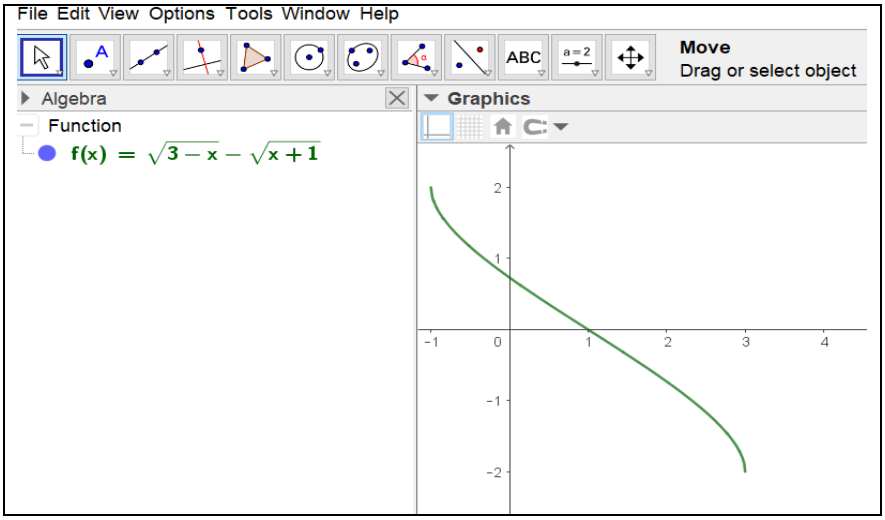
Задача 7

Каква е дължината на интервала, в който е валидно неравенството?

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > 1$$

Запишете отговора с точност до стотните.

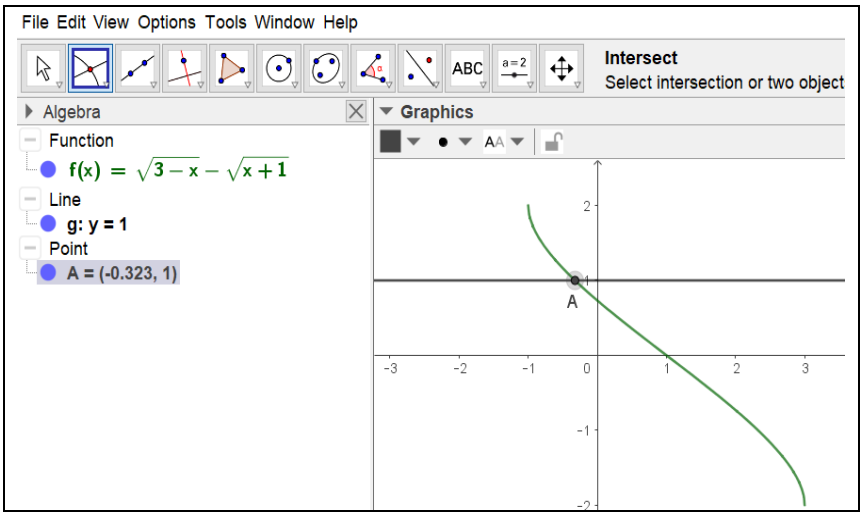
Решение. Използваме ГеоГебра, за да начертаем графиката на функцията $\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}$. Това става, като в командния ред запишем (и изпълним) командата sqrt(3 – x) – sqrt(x + 1). Резултатът е показан на Фиг. 7.1.



Фиг. 7.1

Ясно е, че функцията $f(x)=\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}$ е добре определена в интервала [-1, 3] (само за стойности на x от този интервал подкоренните величини са неотрицателни).

За да разберем къде е изпълнено неравенството $\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>1$, построяваме хоризонтална права g, отстояща над абсцисната ос на разстояние 1. Това може да стане с командата $y=1$. Резултатът е изобразен на Фиг. 7.2. На този чертеж е изобразена и пресечната точка A(-0,323, 1) на графиката на $f(x)$ и правата g. Тази пресечна точка е намерена чрез бутона . Ясно е, че неравенството $\sqrt{3-x}-\sqrt{x+1}>1$ е изпълнено само когато x е от интервала [-1, -0.323] . Дължината на този интервал е 0.677. Като отговор следва да се запише числото 0.68.



Фиг. 7.2

Задача 8

Каква е 59-та цифра след десетичната точка в десетичния запис на дробта $\frac{4}{27}$?

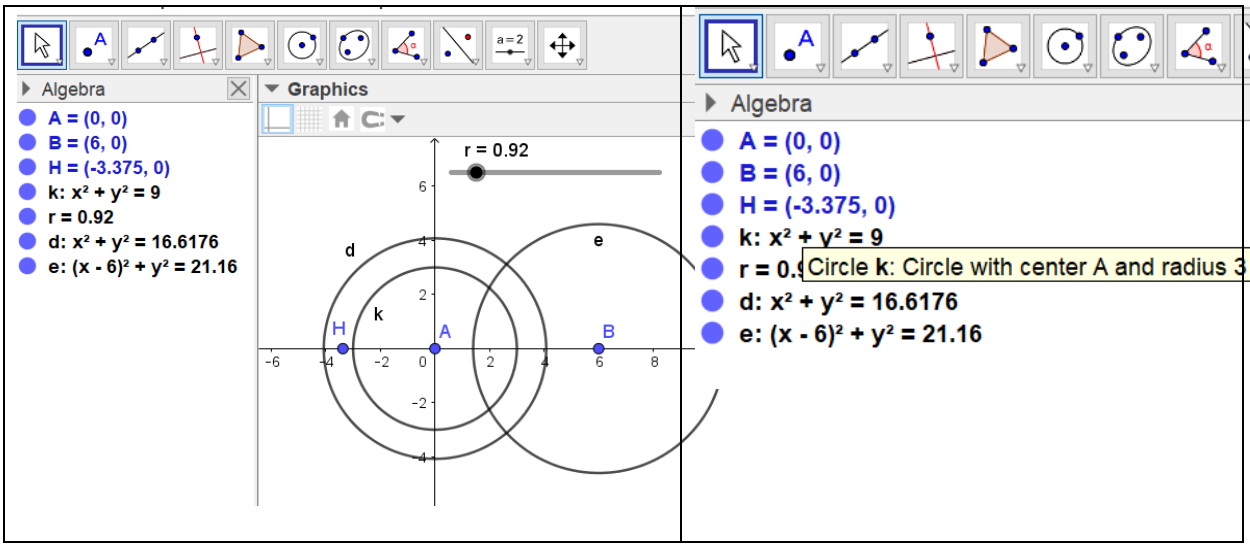
Решение. Известно е, че десетичният запис на рационални числа от вида $\frac{p}{q}$, където p и q са цели числа, „става периодичен“ от известно място нататък. При числото $\frac{4}{27}$ = 0.148148148148148... тази периодичност се вижда с невъоръжено око. Групата 148 се повтаря неограничен брой пъти. За всяко цяло положително число k съответната $3k$ –та цифра е 8. Такава ще е и 60-тата цифра. Следователно, 59-ата цифра е 4. Толкова е и отговорът на тази задача.

Задача 9

Дадени са окръжност k с център в A(0,0) и радиус 3 cm и точка B(6,0). Намерете лицето на фигурата, заградена от точките M, за които допирателната от M към k се отнася към MB както 3:5.

Запишете отговора в cm^2 с точност до десетите

Решение. Винаги е полезно да проучим по-добре какво има в помощния ГеоГебра-файл, който е изобразен на Фиг. 9.1. Виждат се точките A и B от условието на задачата, три окръжности и плъзгач за променливата r. Освен това е изобразена и още една точка H, за която ще стане дума по-късно. Като задържим курсора върху някой от редовете в алгебричния прозорец, се появява описание на съответния елемент от файла. Например, на Фиг. 9.2 е показано какво става, като курсорът е поставен върху реда с име k. Както и следва да очакваме, обяснението е “Circle with center A and radius 3”. Това е дадената в условието на задачата окръжност с център в т. A и радиус 3. Същият ефект се получава и когато с курсора се спрем върху някой от обектите в геометричния прозорец.



Фиг. 9.1

Фиг. 9.2

На Фиг. 9.3 и Фиг. 9.4 е показано описанието на останалите две окръжности: обектът d е окръжност с център в т. A и радиус $\sqrt{9+9r^2}$, а обектът *e* е окръжност с център в т. B и радиус $5r$. Числото r тук е текущата стойност на плъзгача.

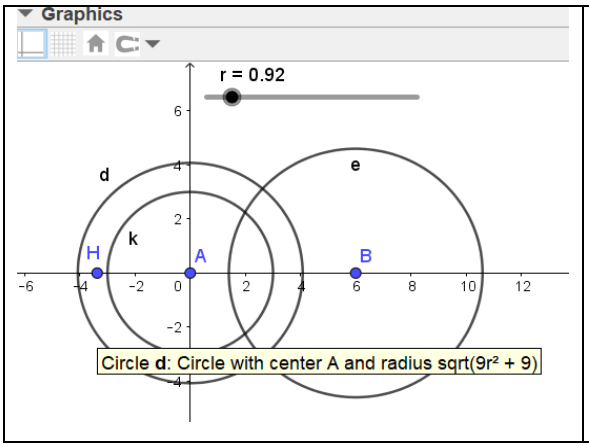


Fig. 9.3

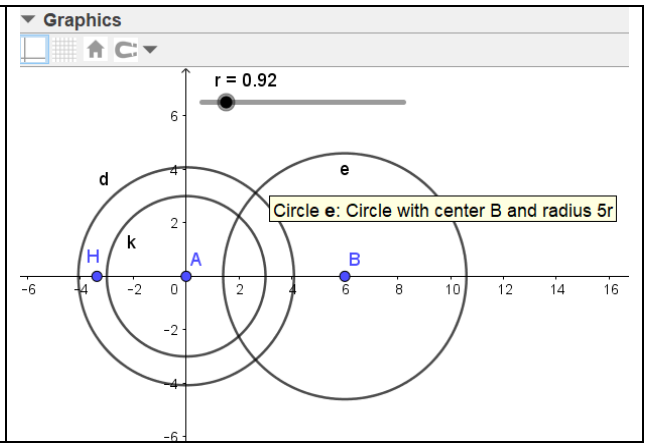
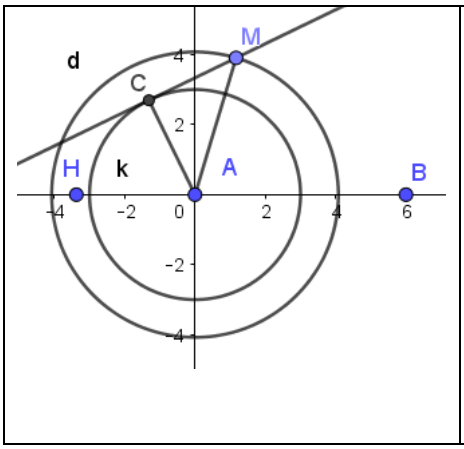
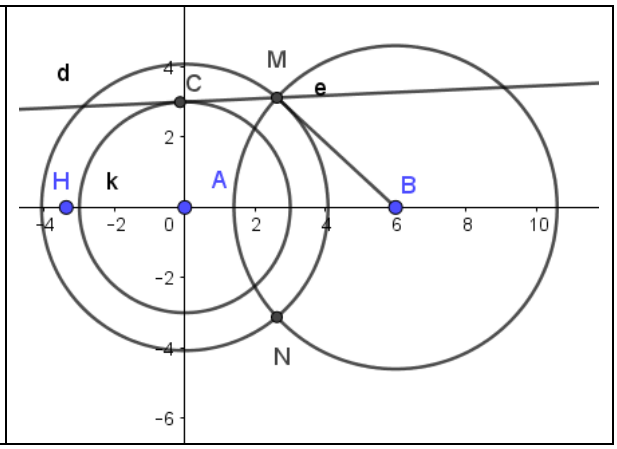


Fig.9.4

Нека M е произволна точка от окръжността d . Прекарваме допирателна от M към окръжността k и означаваме с C допирната точка (Фиг. 9.5). Триъгълникът AMC е правоъгълен. Дължината на AC е 3. Дължината на AM е $\sqrt{9+9r^2}$. От теоремата на Питагор следва, че дължината на MC е $3r$. Ако точката M е обща за окръжностите d и e (Фиг. 9.6), ще е изпълнено съотношението $\frac{MC}{MB} = \frac{3r}{5r} = \frac{3}{5}$. Това подсказва как да онагледим фигурата, заградена от точките M, за които допирателната от M към k

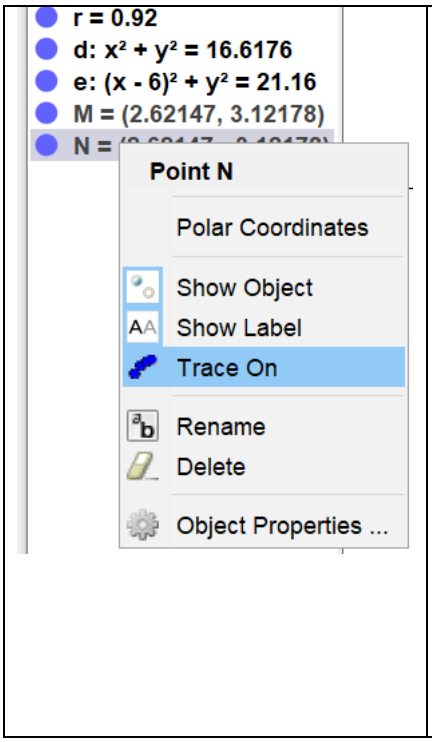


Фиг. 9.5

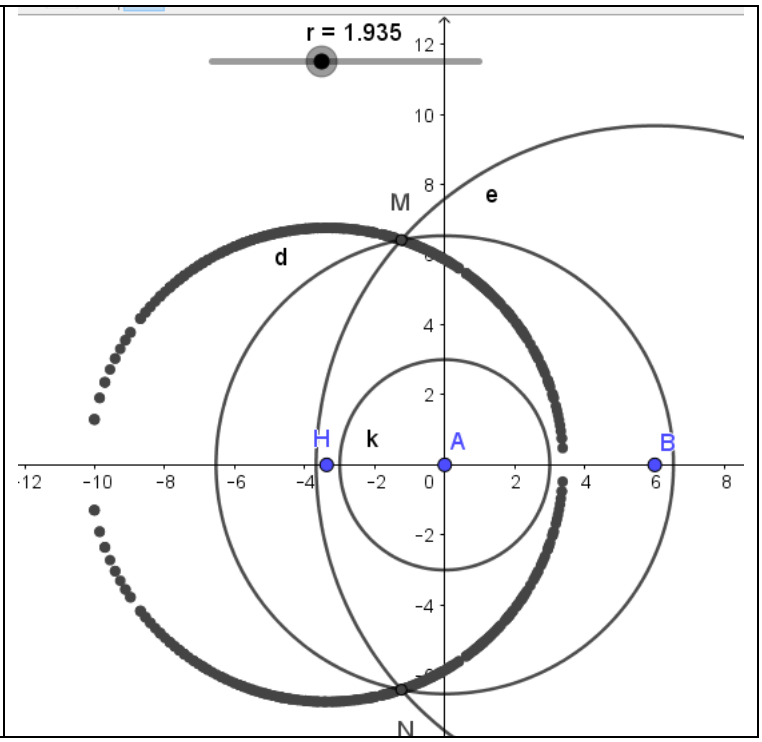


Фиг. 9.6

се отнася към MB както 3:5. С бутона намираме пресечните точки M и N на окръжностите d и e (за онези стойности на r, за които има такива пресечни точки) и поставяме тези две точки в режим „Оставяне на следа“ (Trace on, Фиг. 9.7). При промяна на r (чрез местене на точката на плъзгача), точките M и N ще се движат и ще оставят следа. Така се очертава търсената в условието на задачата фигура (дебелата черна линия на Фиг. 9.8). Ясно е, че става дума за окръжност.

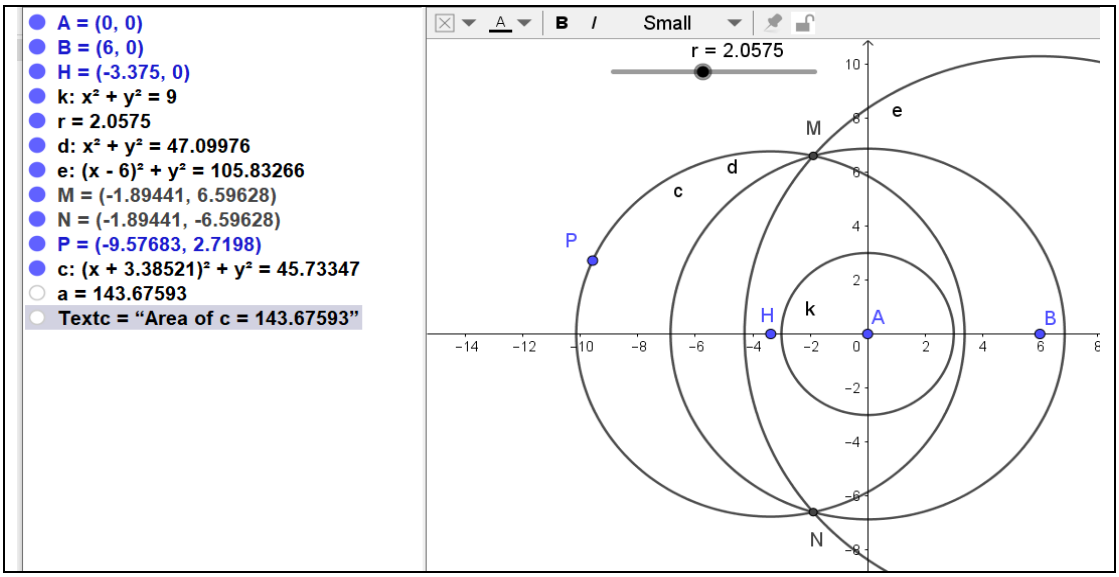


Фиг. 9.7



Фиг. 9.8

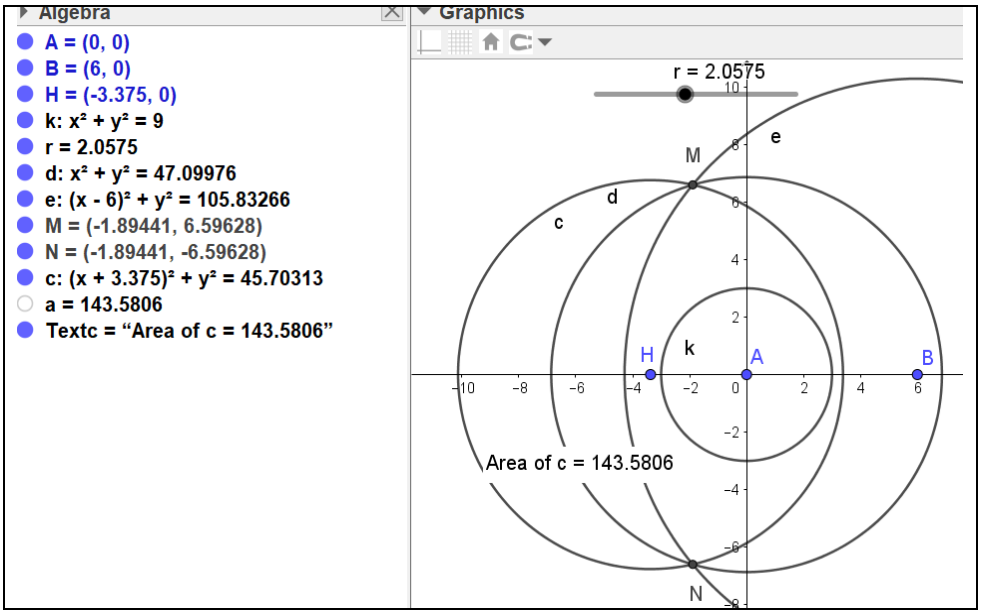
Вече имаме две точки (M и N) от нея. Избираме (с бутона) още една точка P от дебелата черна линия и начертаваме (с бутона) окръжност през точките M, N и P. Тя е онагледена на Фиг.9.10.



Фиг. 9.10

В алгебричния прозорец тази окръжност е записана в ред с: . Лицето ѝ е намерено с бутона и е записано в предпоследния и последния ред на алгебричния прозорец a = 143.67593. Като отговор може да се запише 143.7 cm^2. Тук е уместно да отбележим, че в това решение има сериозен източник на неточност. Това е „ръчният избор" на т. P. Резултатът следва да бъде допроверен с други решения. Ето едно такова решение. До сега не използвахме точка H(-

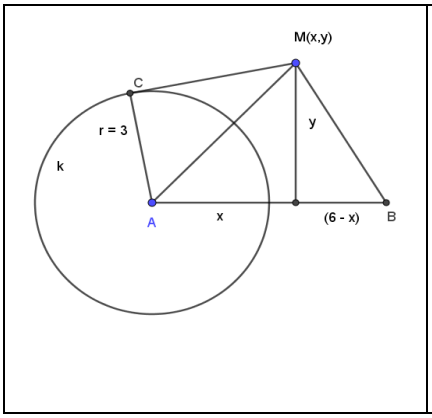
3.375,0) от помощния файл. Можеше да се досетим, обаче, че тя е център на окръжността, която ни интересува. Значи, построяването ѝ можеше да стане не чрез три точки от нея, а с бутона , като посочим H като център и, след това точка M, през която минава тази окръжност. Резултатът се ви жда на Фиг. 9.11. Той е много близък до показаното на Фиг. 9.10. но води до отговора 143.6 cm^2. При оценката на решенията на тази задача организаторите на състезанието (виж края на този текст) дават пълен брой точки и за двата получени отговора.



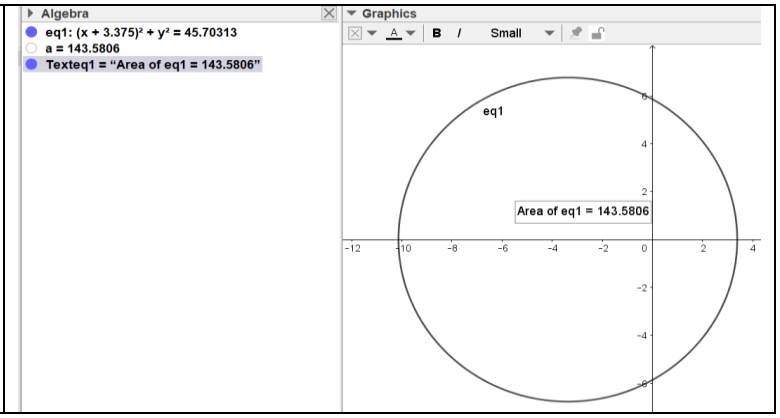
Фиг. 9.11

Друго решение.

Изложените решения на тази задача се основават на познаване и използване на бутоните на ГеоГебра. Задачата има, обаче, значително по-просто, елегантно и точно решение, ако използваме координатите на точка M(x,y). Идеята е показана на Фиг. 9.12.



Фиг. 9.12



Фиг. 9.13

За дължините на отсечките AM, BM и MC са валидни равенствата $MA=\sqrt{x^2+y^2}$, $MB=\sqrt{(6-x)^2+y^2}$, $MC=\sqrt{MA^2-AC^2}=\sqrt{x^2+y^2-9}$. Формулираното в условието на задачата съотношение $\frac{MC}{MB}=\frac{3}{5}$ може да се запише като $5\sqrt{x^2+y^2-9}=3\sqrt{(6-x)^2+y^2}$ или като $25(x^2+y^2-9)=9((6-x)^2+y^2)$. Задаваме последното уравнение в командния ред на нов ГеоГебра-файл: 25(x^2 + y^2 – 9) = 9((6 – x)^2 + y^2). След изпълнение на командата

ГеоГебра автоматично изобразява в геометричния прозорец точките M(x,y), чийто координати удовлетворяват уравнението $25(x^2 + y^2 - 9) = 9((6 - x)^2 + y^2)$ и поставя в първия ред на алгебричния прозорец запис, който е същото уравнение, но в преработен вид: eq1: $(x + 3.375)^2 + y^2 = 45.70313$. Като се постави курсора върху този ред, ГеоГебра указва, че става дума за кръг (Circle). Лицето на този кръг се намира с бутона

. Резултатът е записан във втория ред на алгебричния прозорец: a = 143.5803. Отново стигаме до отговора 143.6 cm^2 .

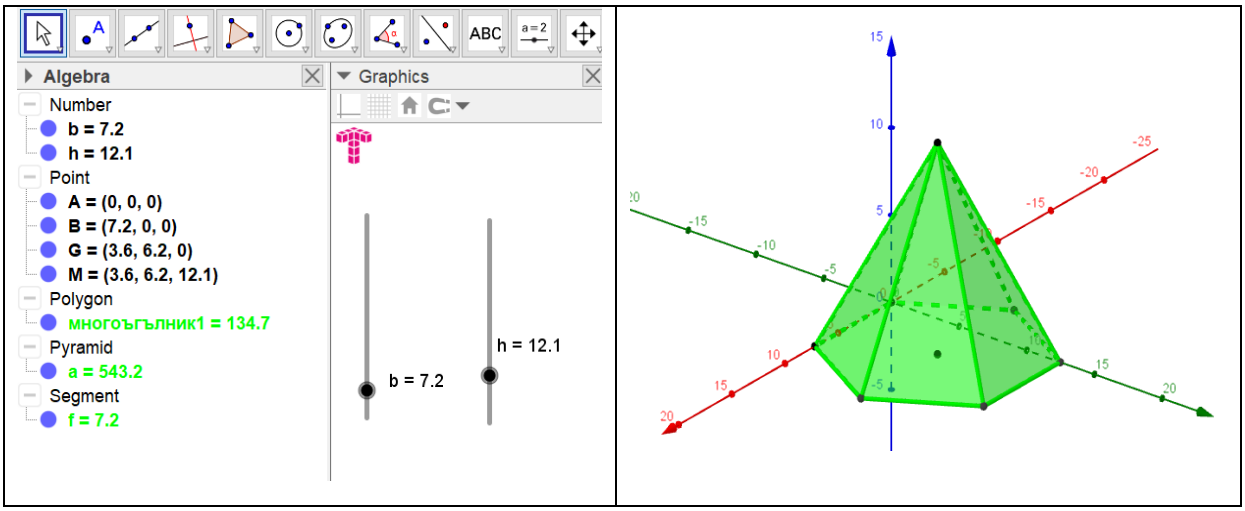
Задача 10

Намерете възможно най-малката околна повърхнина на правилна шестоъгълна пирамида с обем 258 cm^3.

Запишете в cm^2 с точност до десетите.

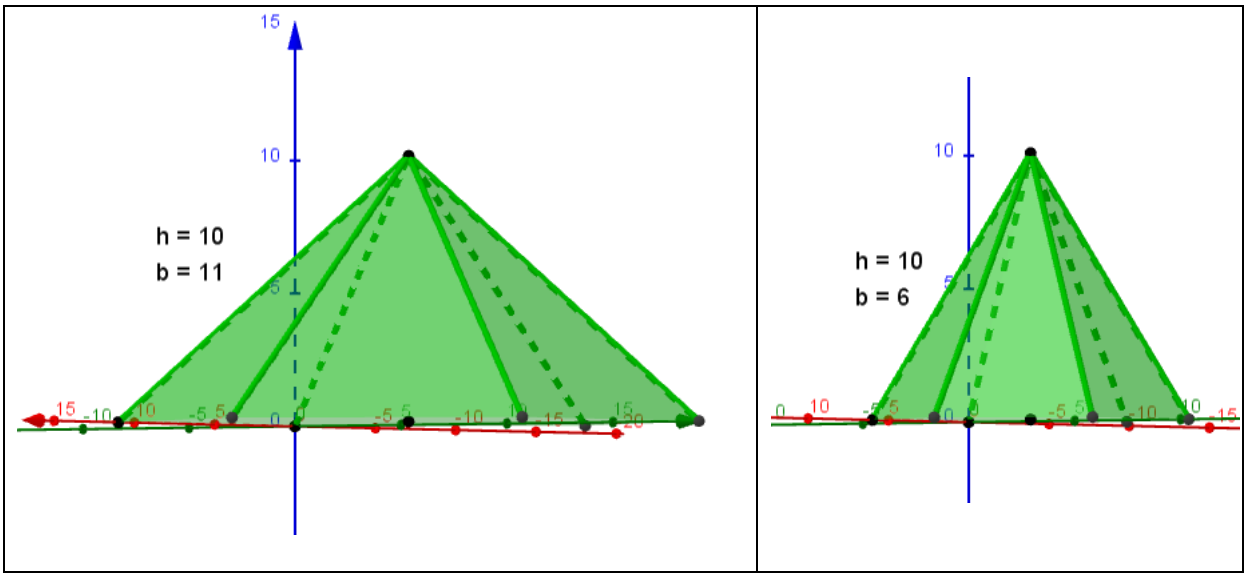
Помощен файл във формат GeoGebra.

Решение. Да разгледаме по-подробно помощния файл към тази задача, за да разберем как той действа и какво прави.



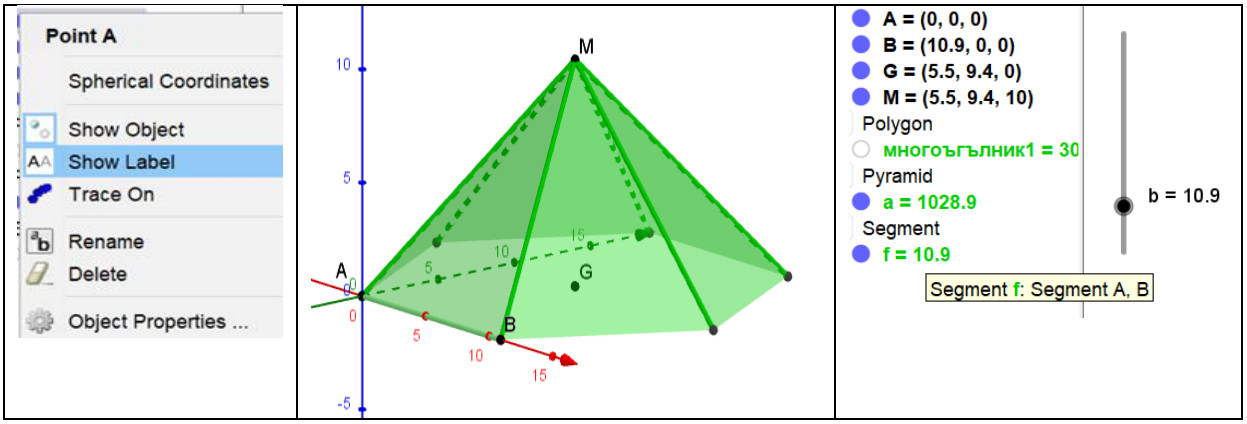
Фиг. 10.1

На Фиг. 10.1 виждаме какво този файл извежда на екрана. С курсор, намиращ се в прозореца за тримерна графика (3D Graphics) и натиснат ляв бутон на мишката можем да въртим и разглеждаме пирамидата от всички страни, като местим курсора. При задействане на плъзгача за **h** виждаме, че в тримерния прозорец се появяват пирамиди с различна височина, но основата не се променя. Значи можем да очакваме, че числото **h** е височината на пирамидата. Когато чрез плъзгача променяме числото **b** се променя големината на основата, но височината не се мени. Това се вижда най-добре, когато основата на пирамидата стане хоризонтална, както е на Фиг. 10.2, където са показани пирамиди с една и съща стойност за **h** и две различни стойности за **b**.



Фиг. 10.2

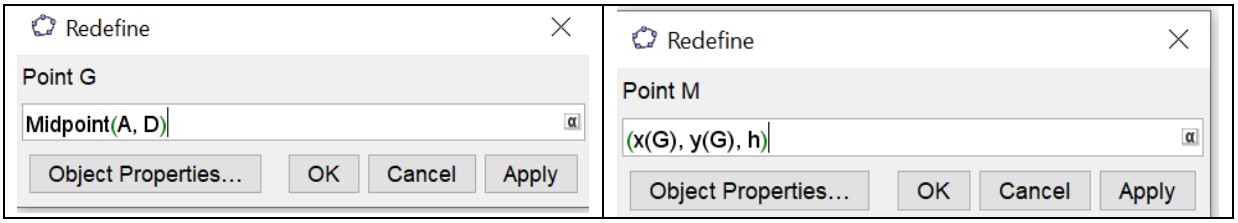
По-нататък е добре да разберем къде са точките A, B, G и M, които присъстват в алгебричния прозорец, но не са показани в 3D графичния прозорец. С щракване с десния бутон на мишката върху точка A се отваря „падащо меню“ (лявата част на Фиг. 10.3). Като изберем в него реда „Show label“ (Покажи знака) буквата A се появява на чертежа. Правим тази операция и с точките B, G и M. Резултатът е видим в средната част на Фиг. 10 3. Ясно е, че A и B са върхове на правилния шестоъгълник, който е в основата на пирамидата. Дължината на отсечката AB е точно текущата стойност на **b**. Това се вижда от координатите на точките A и B, но в същото можем да се убедим, като задържим курсора върху последния ред „**f = 10.9**“ в алгебричния прозорец. Появява се пояснящ надпис „Segment f: Segment A, B“ (Отсечка f: Отсечка A,B) . Стойността **f = 10.9** съответства на текущата стойност на плъзгача за **b** (дясната част на Фиг. 10.3).



Фиг. 10.3

Геогебра разполага със специална команда за построяване на правилни многоъгълници, като се зададат две точки (т.е. отсечка) и брой на страните. Няма да се спираме на тази команда, но ще отбележим, че резултатът от нейнотто действие в нашия случай е записан в алгебричния прозорец като „**многоъгълник1**“, точно под думата **Polygon**. Макар останалите върхове (C, D, E, F) на шестоъгълника да не са отбелязани в алгебричния прозорец, те присъстват в конструкцията. Ако щракнем двукратно с левия бутон на мишката върху точка G , се появява пояснящото описание, че G е средна точка за отсечката с краища A и D (лявата част на Фиг. 10.4). Т.е. G е средата на шестоъгълника. При подобна операция с точка M се появява

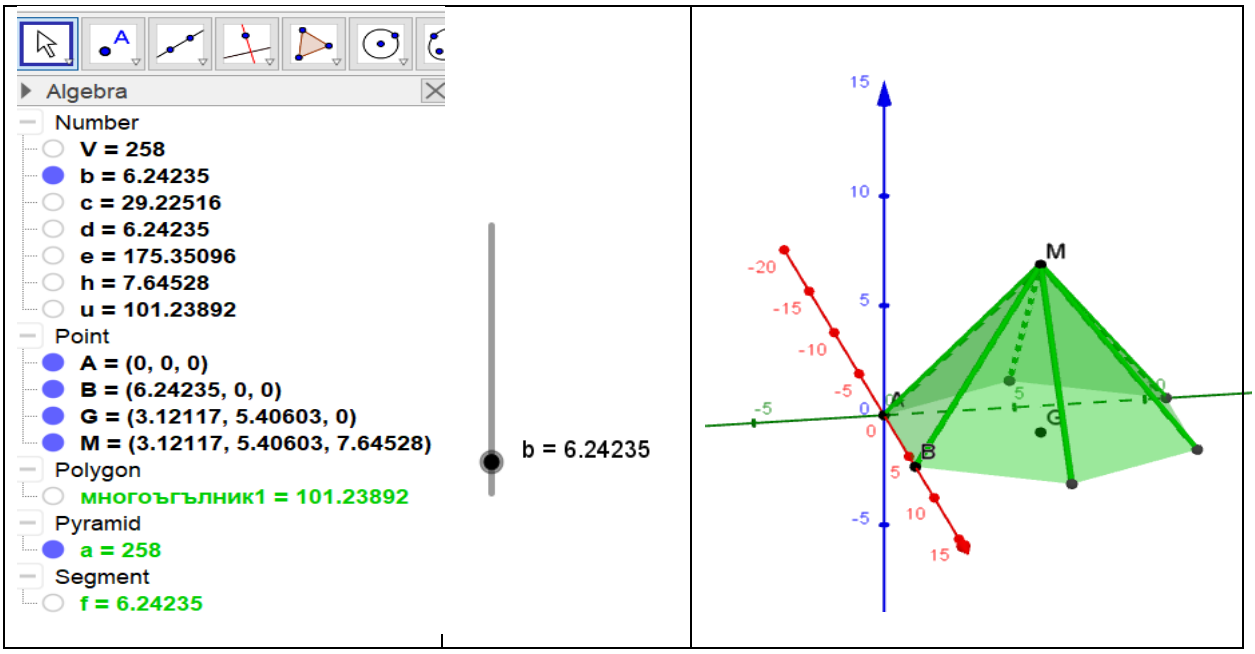
дрфиницията на тази точка (дясната част на Фиг. 10.4). Първата координата на M съвпада с първата координата x(G) на G и втората координата на M съвпада с втората координата y(G) на G. Третата координата на M е височината на пирамидата h. Това показва, че т. M е точно над т. G и че е връх на пирамидата.



Фиг. 10.4

След като сме разбрали действието на помощния файл, не е трудно да намерим решение на задачата. Най-напред извеждаме в явен вид лицето на шестоъгълната основа на пирамидата. Това става с командата u = **Area(многоъгълник1)**. Числото **u** зависи от текущата стойност на плъзгача **b**. Задаваме с командата **V = 258** нова променлива V (за обема на пирамидата) и ѝ приписваме стойност 258. Известно е, че $V = \frac{u\,h}{3}$. От тази формула се вижда, че при зададени стойности на **b** и V височината **h** се определя едноанчно: $h = \frac{3V}{u}$. Записваме в командния ред **h=3V/u** и изпълняваме командата. Помощният файл веднага изобразява на екрана пирамида със страна на основата - текущата стойност **b** на плъзгача и височина –пресметнатото число **h**. Обемът V на пирамидата е, разбира се, 258 cm^2. При промяна на **b** чрез плъзгача получаваме различни пирамиди с обем 258 cm^2 . Сред тях следва да изберем онази с най-малка околна повърхнина. Доколкото околната повърхнина на пирамидата е съставена от триъгълника ABM и още 5 еднакви с него триъгълници, е достатъчно да намерим сред описаните пирамиди онази, за която ABM има най-малко лице. След активиране на бутона

за намиране на лице и последователно щракване върху точките A, B и M ГеоГебра намира лицето на триъгълника ABM и го вписва в ред с буква „**c**“ в алгебричния прозорец. Когато стойността на **b** се променя от долния край на плъзгача нагоре, стойността на лицето **c** първоначално намалява, а след това започва да расте. Можем да намерим минималната стойност на лицето **c** или с внимателно боравене с плъзгача или с командата Minimize(c,b), която намира число от плъзгача на „независимата променлива“ (в случая b), в което „зависимата променлива“ (в случая „c“) достига минимума си. Изпълнението на тази команда вписва в алгебричния прозорец число (означено с буквата **d**). Ако това число се вземе като стойност за d, лицето **c** е най-малко. Ако сега дадем на **b** стойност **d** (с командата **b = d**), помощният файл ще изведе в тримерния графичен прозорец търсената пирамида с обем 258 cm^2 и минимално лице на околната повърхнина. Тя е изобразена на Фиг. 10.5. В ред **e** е записано числото 6**c** на цялата околна повърхнина. То е 175.35096. Като отговор на задачата следва да се впише числото 175.4 .



Фиг. 10.5

В подготовката на задачите и темата за 9 – 10 клас на състезанието ***„ВИВА математика с компютър“*** *(08.12.2019 г.) взеха участие Петър Кендеров, Тони Чехларова, Мария Браухле, Ивайло Кортезов и Румяна Ангелова. Системата за тестване и оценка, включително и Работният лист, в който участниците нанасят отговорите се поддържа от Георги Гачев. Отговорността за описанието на решенията, изложени по-горе, е на Петър Кендеров.*