СЪСТЕЗАНИЕ

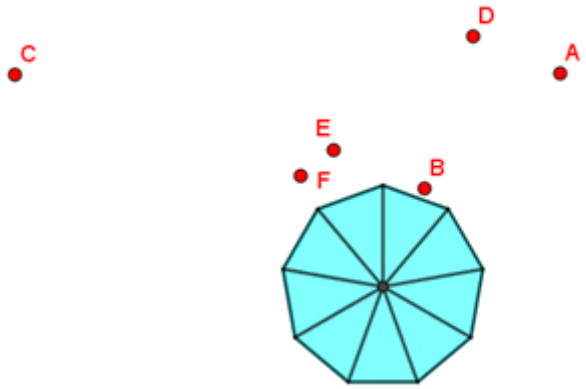
Viva Математика с компютър 08.12.19

Тема за 7. и 8. клас

Решения на задачите

Задача 1

Паметник има форма на правилна деветоъгълна пирамида. На фигурата е показан изглед на паметника отгоре. От кои от точките, които са разположени в равнината на основата на пирамидата, се виждат точно три околни стени на пирамидата?



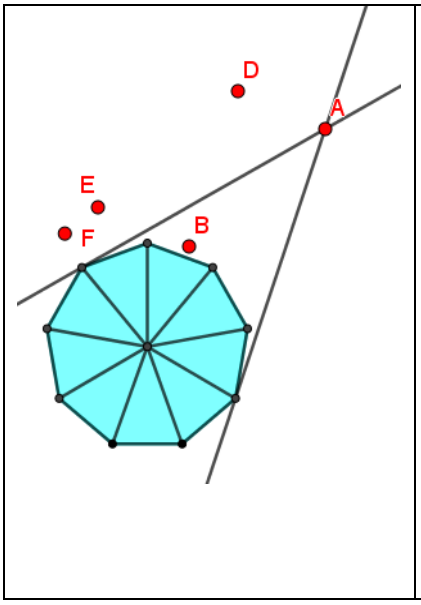
Можете да посочите повече от един отговор

- ☐ A
- ☐ B
- ☐ C
- ☐ D
- ☐ E
- ☐ F

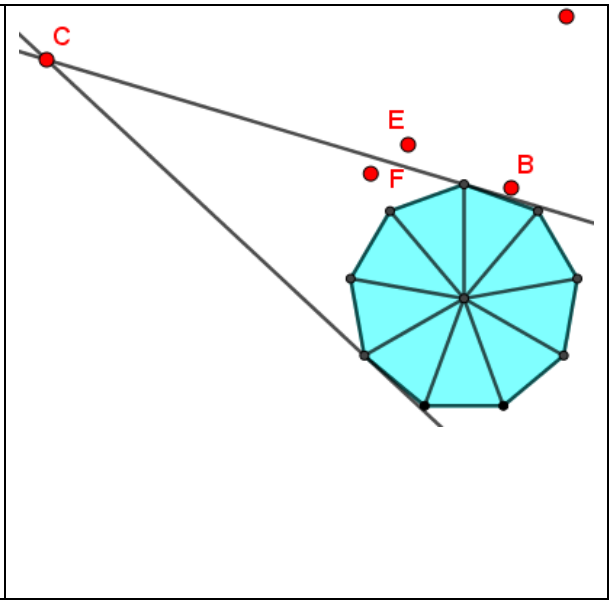
Помощен файл във формат GeoGebra.

Решение: Ще използваме дадения към задачата помощен ГеоГебра-файл. От точка A прекарваме две допирателни към многоъгълника, като използваме бутона (Фиг. 1.1). Наблюдател в точка A вижда четири страни на многоъгълника и, следователно, тази точка не е решение на задачата. Че точка B не е решение, е очевидно. Тя е толкова

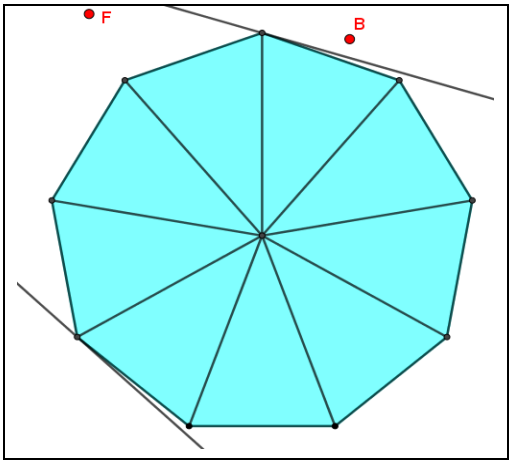
близо до многоъгълника, че от нея се вижда само една негова страна. По-интересна е т. C. Прекарваме от нея допирателни към многоъгълника и полуаваме Фиг.1.2. Виждат се три от страните на многоъгълника, но могат да се появят съмнения, че някоя от двете допирателни минава през два върха на многоъгълника (т.е. съдържа негова страна). В такъв случай възниква въпрос, дали и тази страна да се счита за „виждаща се“. Съмненията могат да се отстранят като „раздуем“ картината (при активиран бутон . Резултатът се вижда на Фиг. 1.3. Значи, точка C е решение на задачата. По аналогичен начин проверяваме и останалите точки. Сред тях решения са още точка D и точка E.



Фиг. 1.1



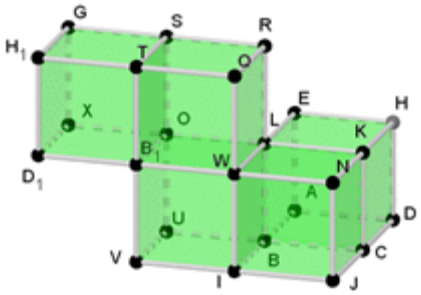
Фиг. 1.2



Фиг. 1.3

Задача 2

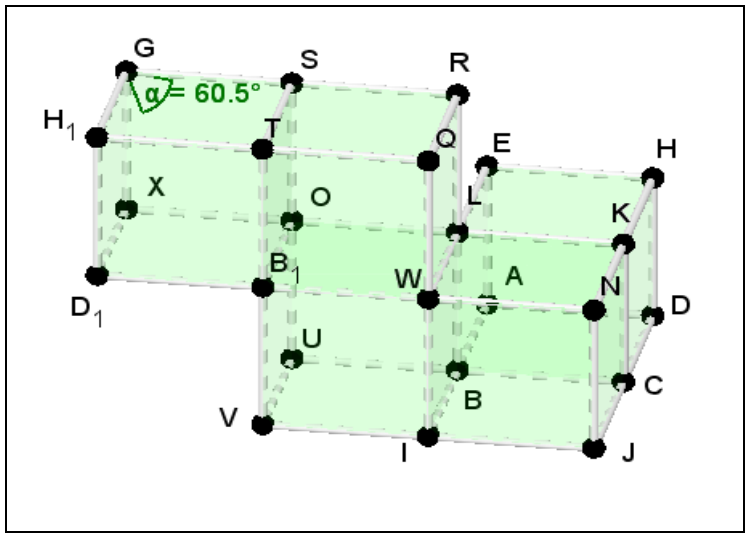
Намерете градусната мярка на ъгъл VGH.



Запишете с точност до десетите.

Помощен файл във формат GeoGebra.

Решение. При активиран бутон за измерване на ъгли в помощния файл, щракваме последователно върху точките V, G и H (в този ред) и получаваме Фиг. 2.1. Наблизо до върха M е изписана градусната мярка на ъгъла VMH. Тя е 60.5°. Като отговор следва да се запише 60.5.



Задача 3

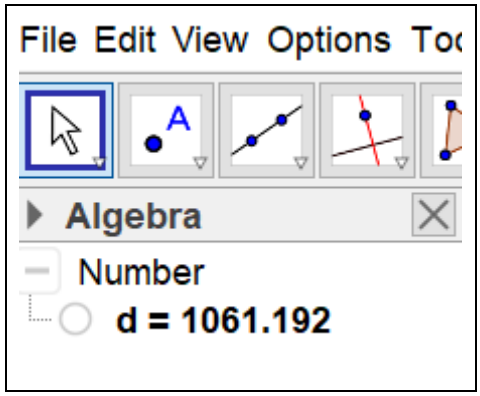
Изчислете 803+109731,75:425

Запишете с точност до стотните.

Помощен файл във формат GeoGebra.

Решение. Помощният файл на тази задача е празен. Не съдържа следи от никакви действия. Можем в командния ред (разположен е най-отдолу на работния лист на ГеоГебра, пред него стои думата Input:) да запишем командата 803 + 109731,75/425. Тази команда „казва“ на ГеоГебра да раздели числото 109731,75 на 425 и да добави към резултата 803. Командата за деление в ГеоГебра е наклонената черта „/“. След изпълнение на командата (с натискане на клавиша „Нов ред“ (Enter)) резултатът се

появява в алгебричния прозорец (Фиг. 3.1). Като отговор следва да се запише числото 1061.19 .



Задача 4

След кликване върху малко квадратче то променя цветността си, т.е., бялото става черно, а черното – бяло. След кликване върху едно квадратче Ники установил, че може да получи едноцветен правоъгълник 4x1, съставен от еднакви по цвят четири малки квадратчета. Върху кои от посочените квадратчета може да е кликнал Ники?

Можете да посочите повече от един отговор

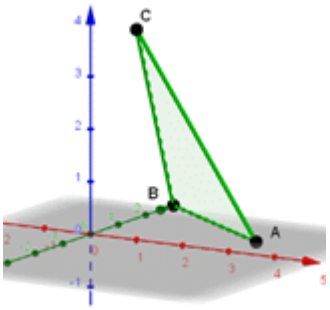
- ☐ Б3
- ☐ Б4
- ☐ Б5
- ☐ В1
- ☐ В2
- ☐ В4
- ☐ Г4
- ☐ Д2

Помощен файл във формат GeoGebra.

Решение. Помощният файл на тази задача позволява да я решим „чрез пробване“ на всички посочени възможности. Те са Б3, Б4, Б5, В1, В2, В4, Г4 и Д2. След щракване върху някое от тези квадратчета, то променя цвета си и пряко виждаме дали се е получил едноцветен многоъгълник с размери 4x1. Верните отговори са: Б3, Б4, В1, В2, Г4 и Д2.

Задача 5

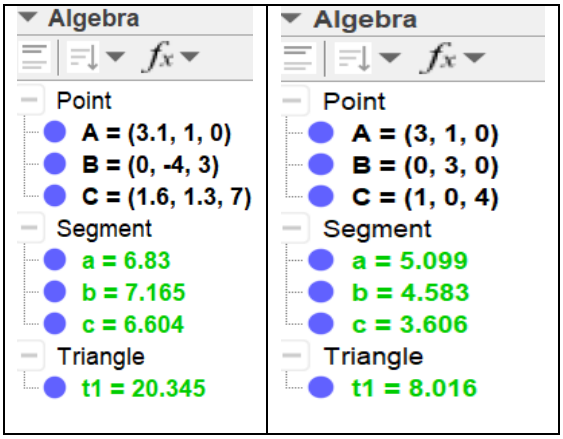
Намерете дължината на медианата от връх C на триъгълник ABC, ако A(3,1,0), B(0,3,0) и C(1,0,4).



Запишете с точност до десетите.

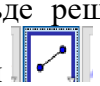
Помощен файл във формат GeoGebra.

Решение. В помощния файл точките A, B и C са с координати, различни от дадените в задачата (Фиг. 5.1). Първата ни работа е да предефинираме тези точки с правилните координати, съответстващи на условието на задачата. С двойно щракване върху точка A в алгебричния прозорец се открива възможност за редактиране на координатите. След поставяне на новите координати се натиска клавиша „Нов ред“ (Enter) и точката A добива правилните координати. Разбира се, предефинирането на координатите може да стане и от командния ред, като просто запишем в него A = (3, 1, 0). Извършваме тези дейности и с останалите две точки – B и C. Резултатът е виден на Фиг. 5.2.



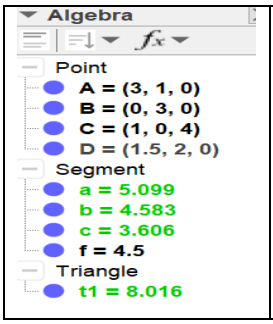
Фиг. 5.1

Фиг. 5.2

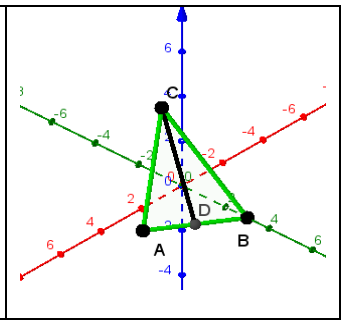
Задачата ще бъде решена, ако намерим средата D на отсечката AB. Тогава, при активиран бутон  и щракване върху т. C и т. D, ГеоГебра автоматично ще построи отсечката CD и ще пресметне дължината ѝ.

Има много начини за намиране на точка D. Най-лесният е да използваме бутона , който пресмята тъкмо това - средата на отсечка. След активиране на този бутон и щракване върху т. A и т. B ГеоГебра намира точка D (1.5, 2, 0). След използване на бутона ГеоГебра изчислява дължината f = 4.5 на отсечката AD (Фиг. 5.3). Като отговор на задачата следва да се впише числото 4.5 (исканата точност е „до десети“). Тримерен изглед на задачата (и решението ѝ) е даден на Фиг. 5.4.

Забележка. За намиране на средната точка D на отсечката AB може да се възползваме и от известния факт, че тя има за координати средните аритметични на съответните координати на т. A и т. B. Т. е. D (1.5, 2, 0).



Фиг. 5.3



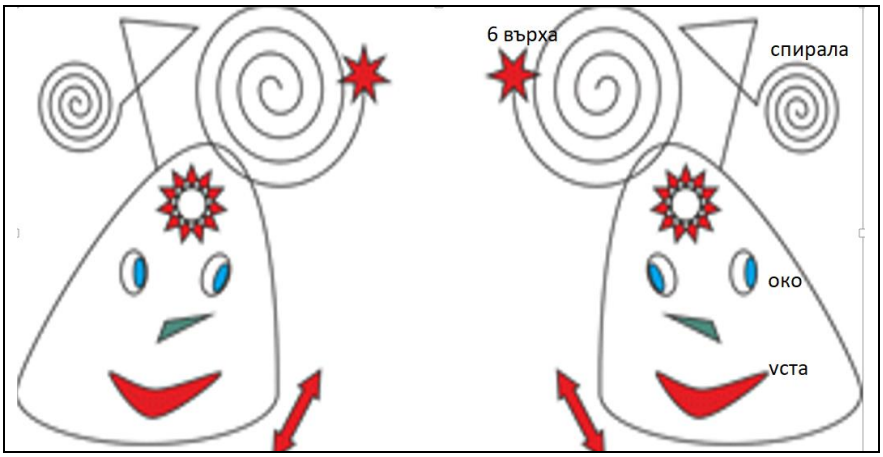
Фиг. 5.4

Задача 6

Художник нарисувал фигури и отражението им в огледалото, но допуснал грешки. Колко са грешките?

Помощен файл във формат GeoGebra.

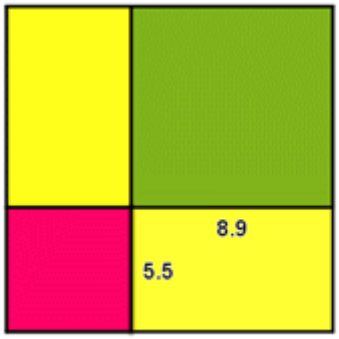
Решение. Грешките са 4 и са отбелязани на Фиг. 6.1 .



Фиг.. 6.1

Задача 7

Фигурата визуализира равенството $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ и $b=8,9$. На колко е равно $(a-b)^2$



Запишете с точност до десетите.

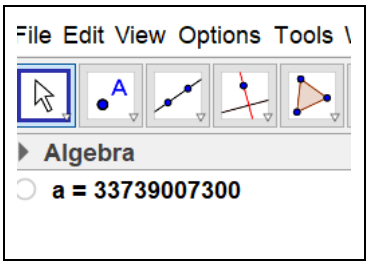
Помощен файл във формат GeoGebra.

Решение. Условието на задачата и картинката насочват, че $(a-b) = 5.5$. Следователно $(a-b)^2 = 30.25$.
Като отговор може да се запише 30.3.

Задача 8

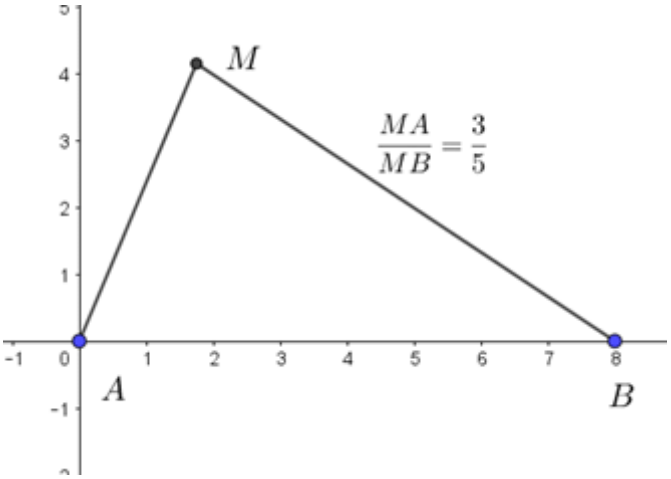
Коя е предпоследната цифра на стойността на $9^{11} + 11^9$?

Решение. В командния ред на празен ГеоГебра файл записваме 9^11 + 11^9 и изпълняваме командата. ГеоГебра пресмята резултата и вписва в алгебричния прозорец числото 33739007300 (Фиг. 8.1) Като отговор следва да се впише числото 0.



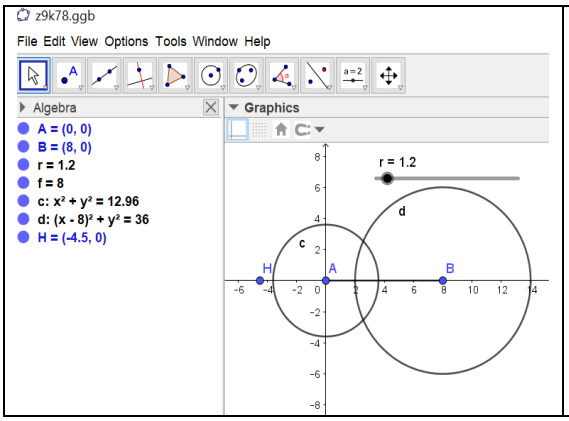
Задача 9

Дадени са две точки A и B. Известно е, че разстоянието между тях е 8 см. Намерете лицето на фигурата, заградена от точките M, за които е изпълнено съотношението $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{5}$.

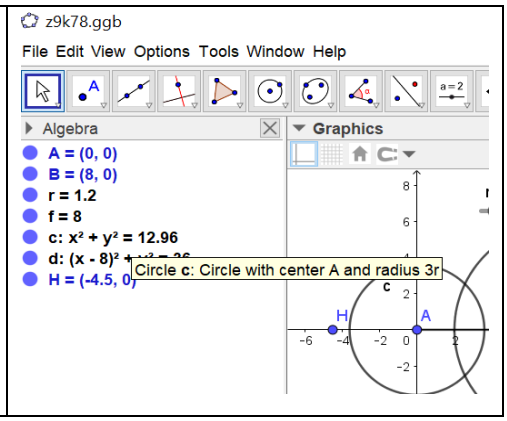


Запишете резултата с точност до $см^2$.

Решение. Винаги е полезно да проучим по-добре какво има в помощния ГеоГебра-файл, който е изобразен на Фиг. 9.1. Виждат се точките A и B от условието на задачата, две окръжности и плъзгач за променливата r. Освен това е изобразена и още една точка H, за която ще стане дума по-късно. Като задържим курсора върху някой от редовете в алгебричния прозорец, се появява описание на съответния елемент от файла. Например, на Фиг. 9.2 е показано какво става, като курсорът е поставен върху реда с име c. Описанието е “Circle with center A and radius 3r”. Това е окръжност с център A и радиус 3r. Същият ефект се получава и когато с курсора се спрем върху някой от обектите в геометричния прозорец.

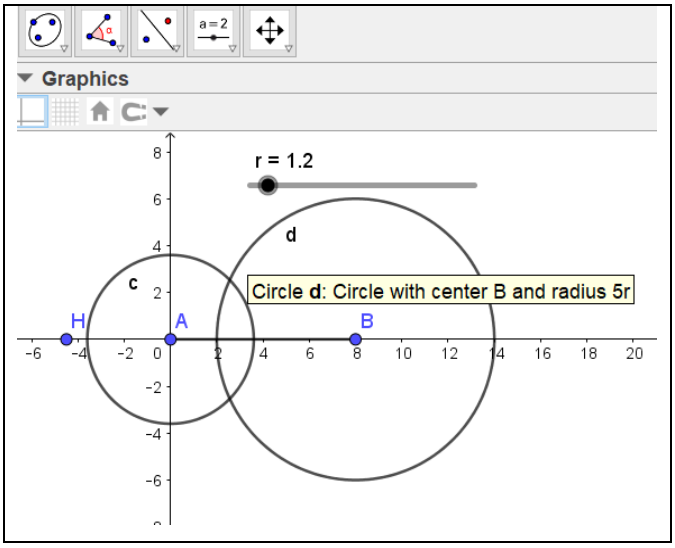


Фиг. 9.1



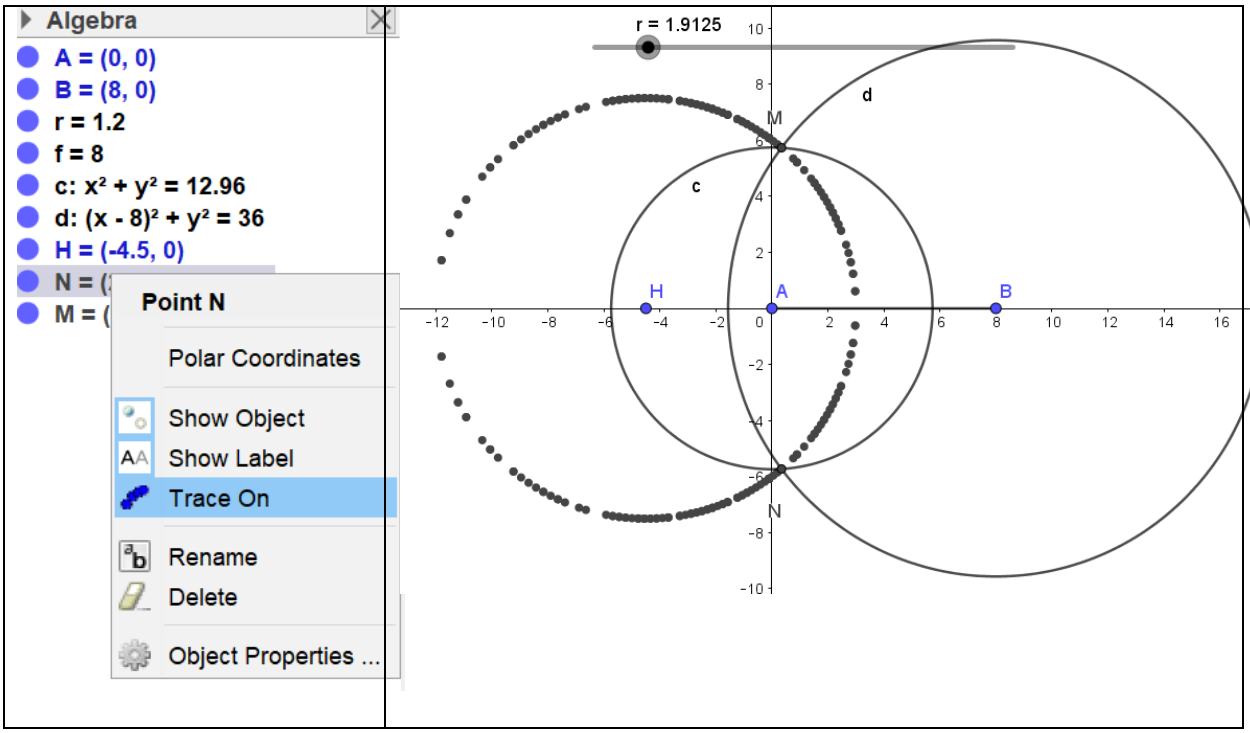
Фиг. 9.2

На Фиг. 9.3 е показано описанието на втората окръжност: обектът d е окръжност с център в т. A и радиус $5r$. Числото r и в двата случая е „стойността на плъзгача" и се определя от мястото на точката върху плъзгача.



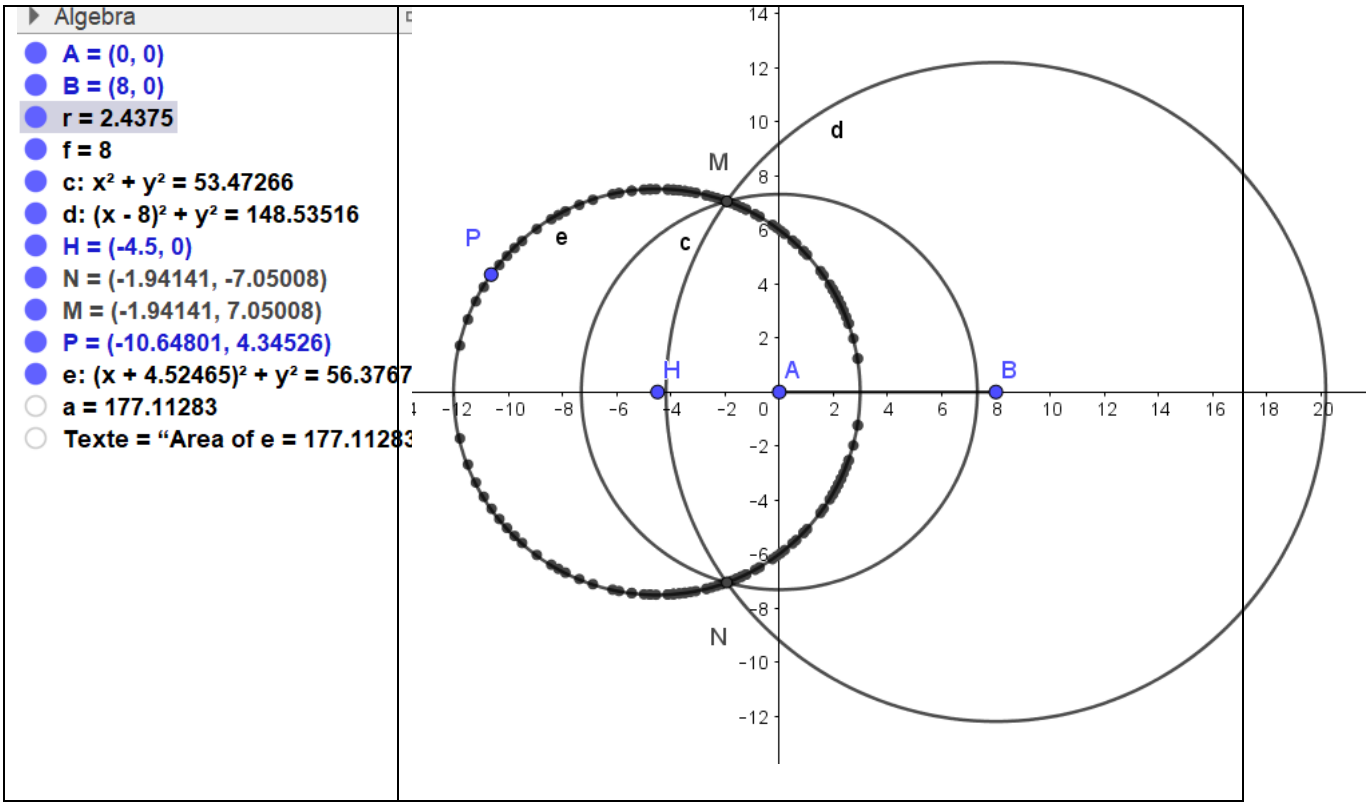
Фиг. 9.3

Ако M е обща точка на двете окръжности c и d, ще е изпълнено съотношението $\frac{MA}{MB} = \frac{3r}{5r} = \frac{3}{5}$. Това подсказва как да онагледим множеството, за което става дума в условието на задачата. С бутона намираме пресечните точки M и N на окръжностите d и c (за онези стойности на r, за които има такива пресечни точки) и поставяме тези две точки в режим „Оставяне на следа" (Trace on, Фиг. 9.4). При промяна на r (чрез местене на точката на плъзгача), точките M и N ще се движат и ще оставят следа. Така се очертава търсената в условието на задачата фигура (дебелата и отчасти пунктирана черна линия на Фиг. 9.5). Ясно е, че става дума за окръжност. Вече имаме две точки (M и N) от тази окръжност.



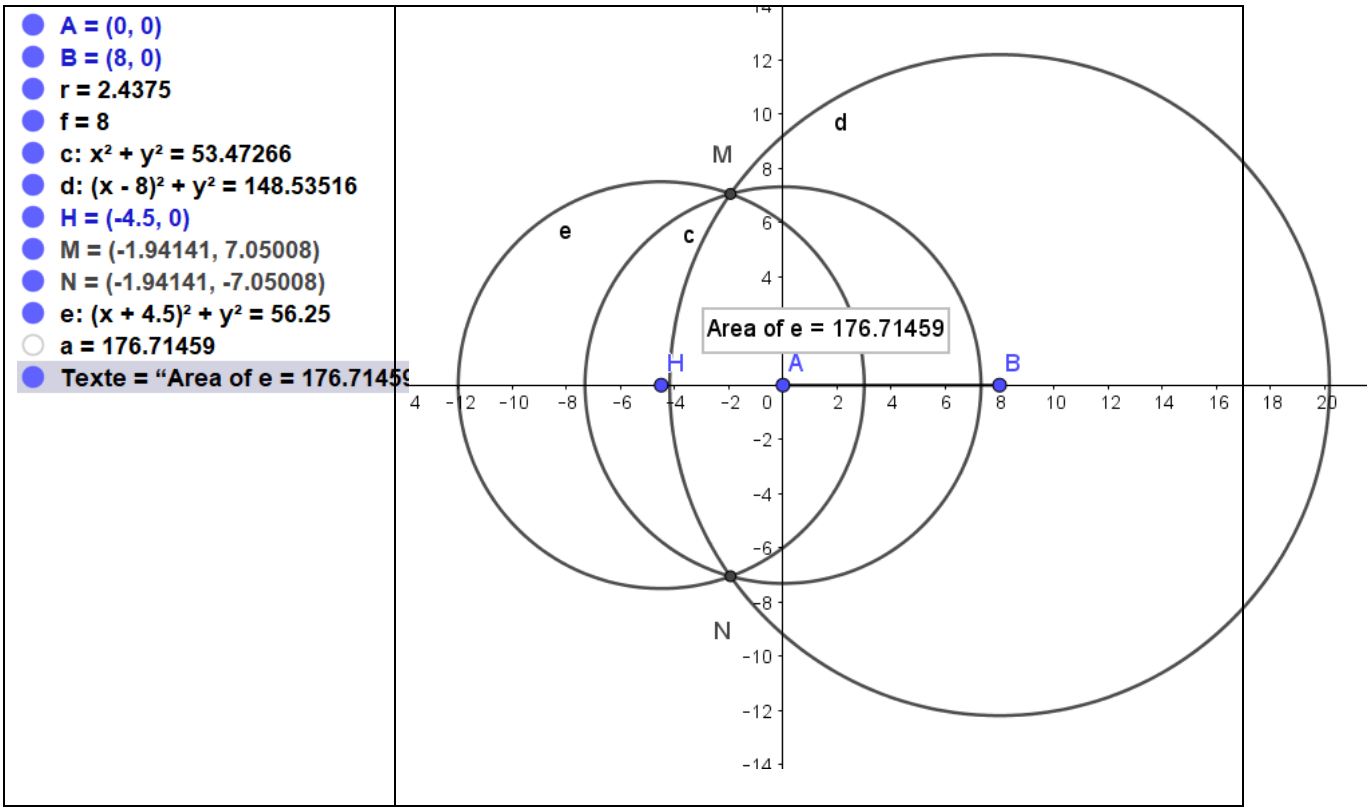
Фиг. 9.4 Фиг. 9.5

Избираме (с бутона) още една точка P от дебелата черна линия и начертаваме (с бутона) окръжност през точките M, N и P. Тя е показана на Фиг.9.6. Вижда се, че тази окръжност добре съвпада с пунктираната дебела черна линия.



Фиг. 9.6

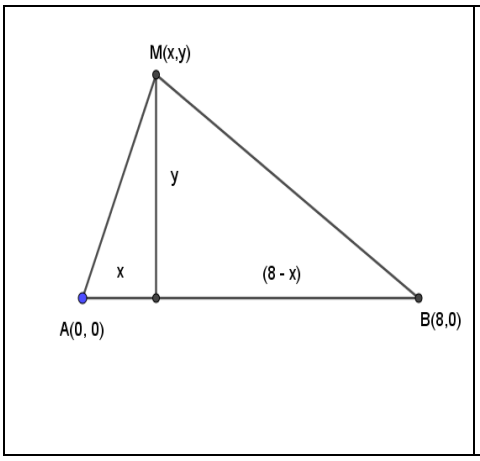
В алгебричния прозорец тази окръжност е записана в ред е: . Лицето ѝ е намерено с бутона и е записано в предпоследния и последния ред на алгебричния прозорец а = 177.11283. Като отговор може да се запише 177 cm^2. Тук е уместно да отбележим, че в това решение има сериозен източник на неточност. Това е „ръчният избор“ на т. Р. Резултатът следва да бъде допроверен и с други решения. Ето една такава проверка. До сега не използвахме точка H(- 4.5,0) от помощния файл. Можеше да се досетим, обаче, че тя е център на окръжността, която ни интересува. Значи, построяването ѝ можеше да стане не чрез три точки от нея, а с бутона , като посочим H като център и, след това, точка M, през която минава тази окръжност. Резултатът се ви жда на Фиг. 9.7. Той е много близък до показаното на Фиг. 9.7 и отново води до отговора 177 cm^2.



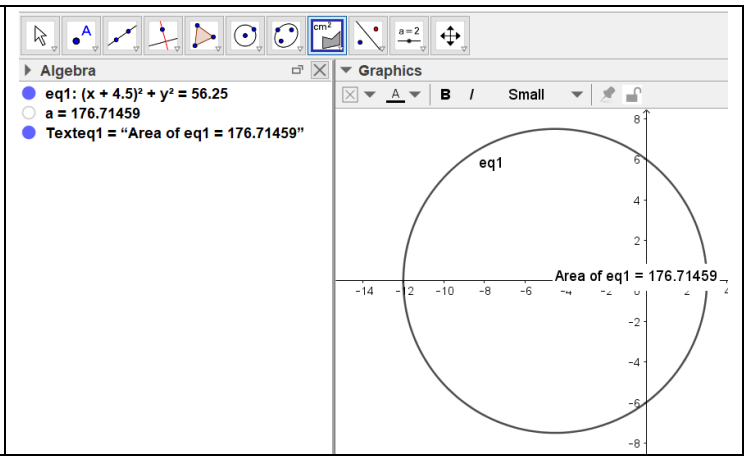
Фиг. 9.7

Друго решение.

Изложените решения на тази задача се основават на познаване и използване на бутоните на ГеоГебра. Задачата има значително по-просто, елегантно и точно решение, ако използваме координатите на точка M(x,y). Идеята е показана на Фиг. 9.8.



Фиг. 9.8



Фиг. 9.9

За дължините на отсечките AM и BM са валидни равенствата $MA=\sqrt{x^2+y^2}$, $MB=\sqrt{(8-x)^2+y^2}$. Формулираното в условието на задачата съотношение $\frac{\text{MA}}{\text{MB}}=\frac{3}{5}$ може да се запише като $5\sqrt{x^2+y^2}=3\sqrt{(8-x)^2+y^2}$ или като $25(x^2+y^2)=9((8-x)^2+y^2)$. Задаваме последното уравнение в командния ред на нов ГеоГебра-файл: 25(x^2 + y^2) = 9((6 – x)^2 + y^2). След изпълнение на командата ГеоГебра автоматично изобразява в геометричния прозорец точките M(x,y), чийто координати удовлетворяват уравнението $25(x^2+y^2)=9((6-x)^2+y^2)$ и поставя в първия ред на алгебричния прозорец запис, който е същото уравнение, но в преработен вид: eq1: $(x+4.5)^2+y^2=56.25$ (Фиг. 9.9). Като се постави курсора върху този ред, ГеоГебра указва, че става дума за кръг (Circle). Лицето на този кръг се намира с бутона . Резултатът е записан във втория ред на алгебричния прозорец: a = 176.71459. Отново стигаме до отговора 177 cm^2 .

Помощен файл във формат GeoGebra.

Задача 10

Намерете възможно най-малката пълна повърхнина на правоъгълен паралелепипед с обем 83 cm^3, ако единият му ръб е с дължина 5 см.

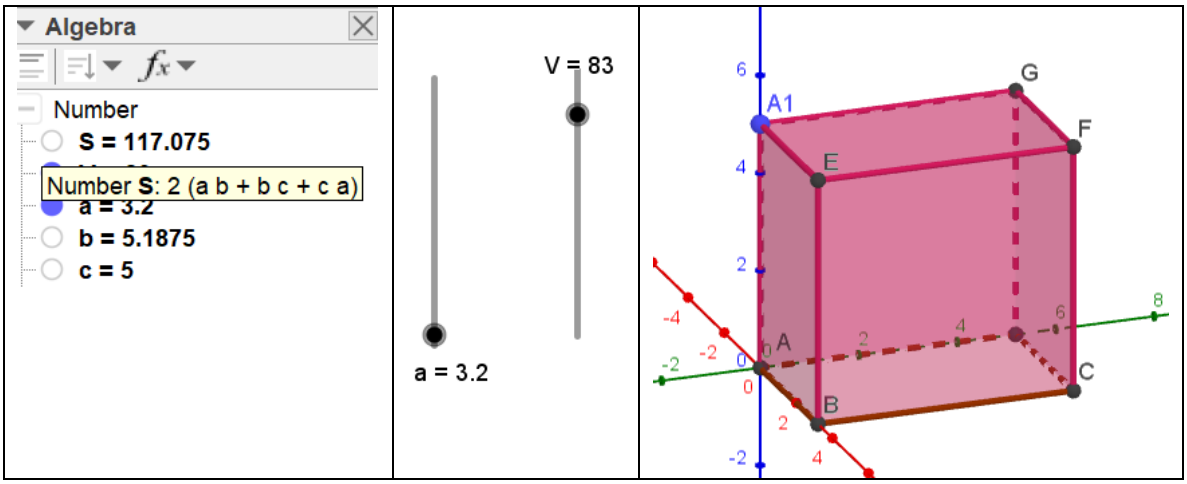
Запишете в см^2 с точност до стотните

Помощен файл във формат GeoGebra.

Решение. Обемът V на паралелепипед се определя от формулата $V=abc$, където a, b и c са дължината, ширината и височината на тялото. В условието на задачата е казано, че една от страните му е 5 cm и че обемът му е 83 cm^3. Можем да считаме, че $c=5$. Значи $83=5ab$ или $b=\frac{83}{5a}$. Следователно, на всяко положително число a съответства паралелепипед с дължина a , ширина $b=\frac{83}{5a}$ и височина $c=5$. Задачата

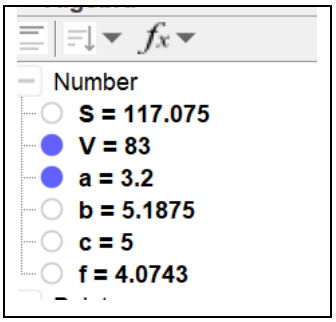
се състои в това, да намерим такова a, за което пълната повърхнина на съответстващия на това a паралелепипед е най-малка. Нека напомним, че пълната повърхнина се изразява чрез формулата $S = 2(ab + bc + ac) = = 2\left(\frac{83}{5} + \frac{83}{a} + 5a\right)$.

Помощният файл към тази задача (Фиг 10.1) има плъзгач за обема V на паралелепипеда и плъзгач за числото a. Плъзгачът за V следва да се сложи на 83. Тогава помощният файл пресмята околната повърхнина S по горната формула за всяко отделно число $a > 0$ (виж най-лявия прозорец на Фиг. 10.1)..



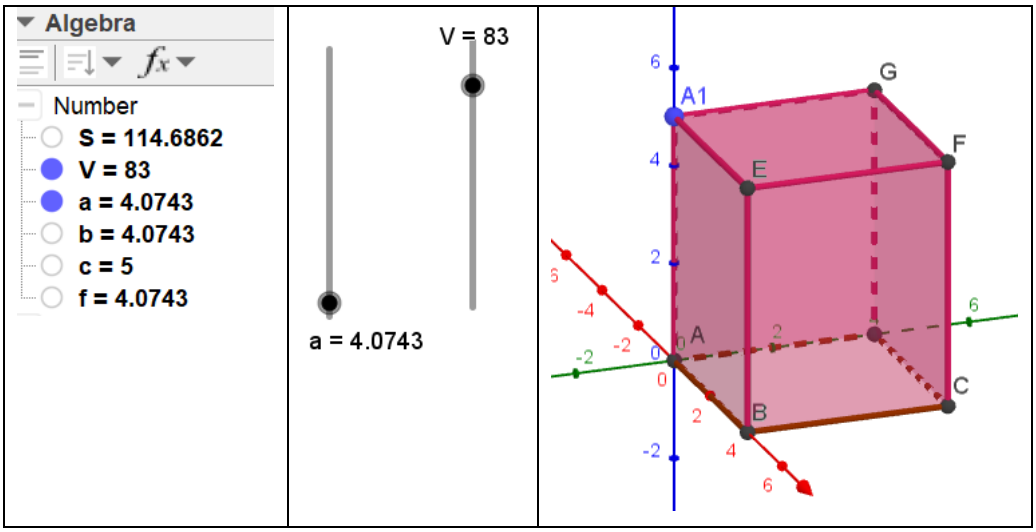
Фиг. 10.1

Движим плъзгача за a от долния край – нагоре. Виждаме, че стойността на S първоначално намалява, достига някаква минимална стойност, а после започва да расте. Намирането на минималната стойност на S може да стане или с внимателно боравене с плъзгача, или като се използва командата **Minimize(<Dependent Number>, <Free Number>)** за намиране на минимум на величина (в случая S), която зависи от друга величина (в случая – от числото a). След записване в командния ред на командата **Minimize(S,a)** и изпълнението ѝ, ГеоГебра вписва в алгебричния прозорец число, при което S приема минимална стойност и дава име на това число. На Фиг. 10.2 това е числото f = 4.0743.



Фиг. 10.2

Ако сега изпълним командата $a = f$, ГеоГебра ще пресметне и впише в първия ред на алгебричния прозорец минималната пълна повърхнина $S = 114.6862$. и ще изобрази съответния на числото $a = f = 4.0743$ паралелепипед в прозореца за тримерна графика (Фиг. 10.3).



Фиг. 10.3

Като отговор на задачата следва да се впише 114.69 .

В подготовката на задачите и темата за 7 – 8 клас на състезанието ***„ВИВА математика с компютър“*** *(08.12.2019 г.) взеха участие Тони Чехларова, Петър Кендеров, Мария Браухле, Ивайло Кортезов и Румяна Ангелова. Системата за тестване и оценка, включително и Работният лист, в който участниците нанасят отговорите се поддържа от Георги Гачев. Отговорността за описанието на решенията, изложени по-горе, е на Петър Кендеров.*