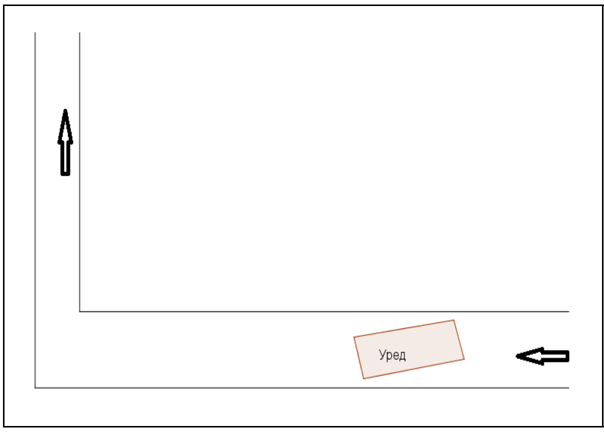
Решенията на задачите от

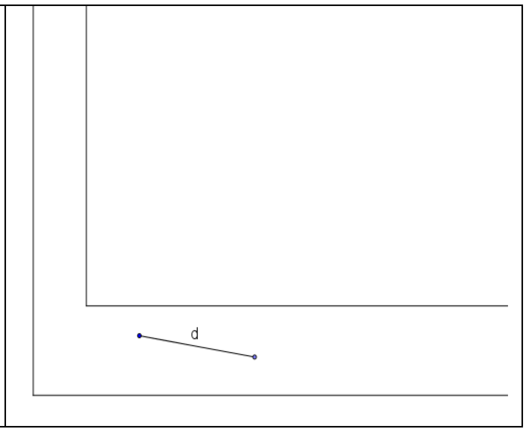
Тема на месеца

(за месец май 2018 година)

Служителите от Технически отдел на известна фирма трябва да преместят тежък уред с правоъгълна форма от едно помещение в друго, като го придвижат с влачене по дълги коридори, като изобразените на Фиг. 1. За да разберат, дали уредът може да мине успешно през ъгъла, в който се срещат коридорите, те решават да направят предварително изследване с компютърен модел. Като начало, опростяват задачата и разглеждат уреда като обикновен прът с дължина d (Фиг. 2) и опитват да намерят максималната дължина на прът, който може да премине от единия в другия коридор без вдигане от пода и без „задиране“ в точката, където се срещат вътрешните стени на коридорите.



Фиг. 1

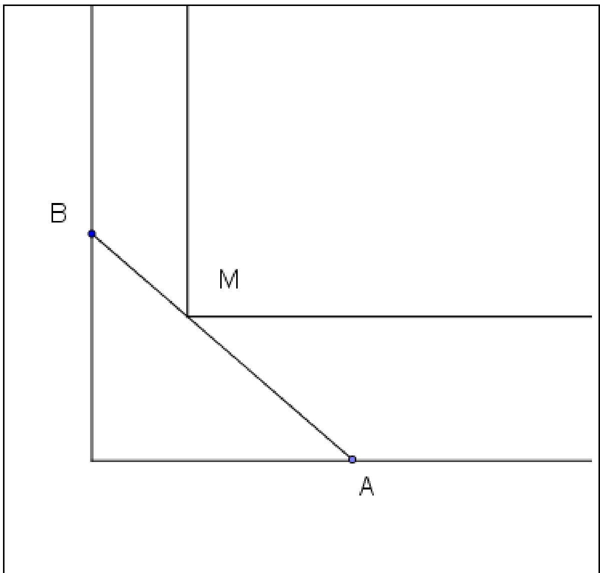


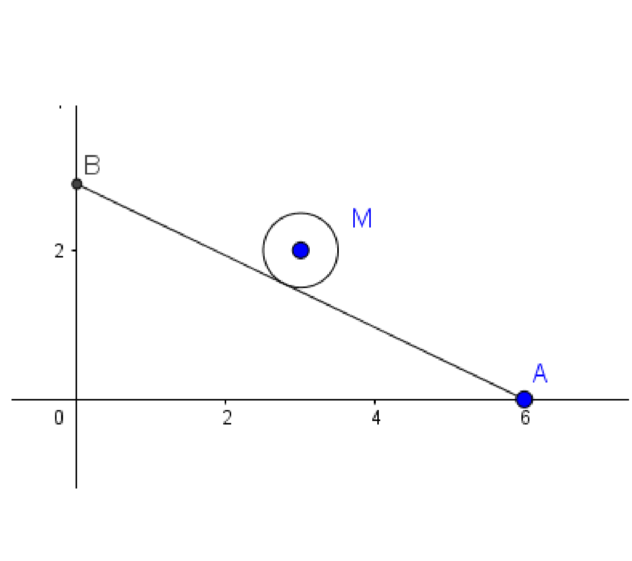
Фиг. 2

За изследване на ситуацията те използват следния pomoshten fajl В него, при натиснат бутон , краищата на пръта могат да се местят и „експериментално“ може да се провери дали той ще мине или няма да мине през ъгъла на коридорите. След редица опити те стигнали до извода, че максималната дължина на успешно преминаващ прът е всъщност равна на минималната дължина на отсечка AB с краища върху външните стени на коридорите и минаваща през пресечната точка M на вътрешните стени (Фиг. 3).

Задача 1. Координатите на точка M(3,2) са в метри. Намерете дължината на най-късата отсечка, която минава през точката M, единият й край лежи на положителната част на абсцисната ос, а другият край - на положителната част на ординатната ос.

Запишете отговора в сантиметри





Фиг. 3 Фиг. 4

Задача 2. Тази задача е в известен смисъл обратна към Задача 1. Отсечката AB е зададена с краищата си A(4,0) и B(0,3), като координатите пак са в метри. Търси се такава точка M от отсечката AB, че сред всички отсечки с краища върху положителните части на координатните оси и минаващи през M, отсечката AB да е най-късата.

Запишете ординатата на точка M в сантиметри

Задача 3. Точката M(3,2) е център на окръжност k с радиус 0.5 (всички единици са в метри). Намерете дължината на най-късата отсечка AB, която се допира до k , единият й край е от положителната част на абсцисната ос, а другият край е от положителната част на ординатната ос (Фиг. 4).

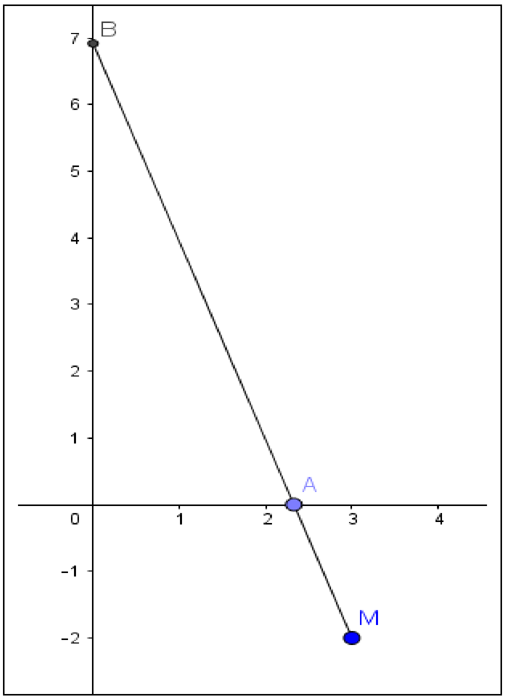
Запишете отговора в сантиметри

Задача 4. През точка M(3, -2) минава права, която пресича положителните части на координатните оси съответно в точките A и B (Фиг. 5). Каква е минималната стойност на сумата от дължините на отсечките MA и MB.

Запишете отговора в сантиметри

Задача 5. Нека ширината на единия коридор е 3 метра, а ширината на другия коридор – 2 метра. Правоъгълният уред (Фиг. 1), които трябва да премине от единия коридор в другия, има дължина 4 метра. Каква е максималната ширина на уреда, при която придвижването може да се осъществи?

Запишете отговора в сантиметри



Фиг. 5

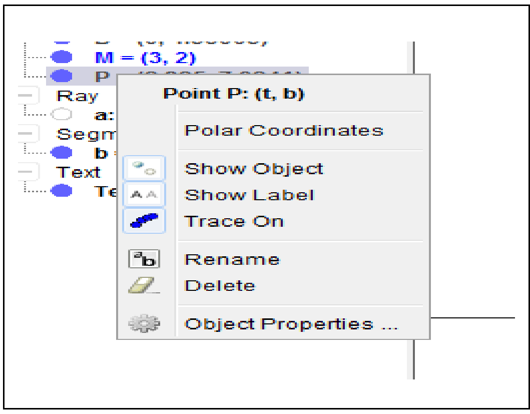
Отговори на задачите:

задача	1	2	3	4	5
отговор	702	108	601	702	

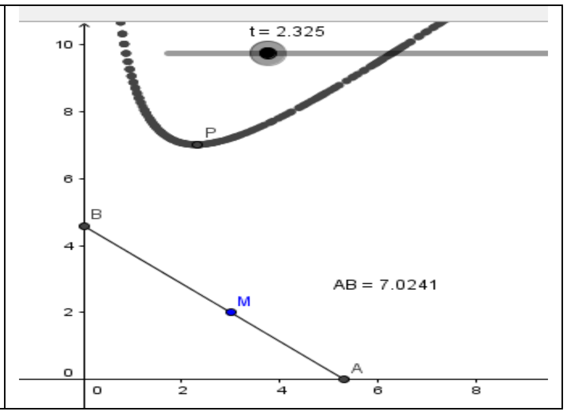
Решение на Задача 1. Правим помощен файл (reshenie zadacha 1). В него точката A се движи с помощта на плъзгач с параметър t . Точката A е с координати (3 + t , 0), а точката B е получена като пресечна точка на ординатната ос с лъч, тръгващ от A и минаващ през M(3, 2). Изобразена е и дължината d на отсечката AB. Като местим плъзгача получаваме различни стойности за d . За графично проследяване на поведението на d, когато t се мени, въвеждаме точка P с координати (t , d). След щракване с левия клавиш на мишката върху реда в алгебричния прозорец, където е определението на точката P, се отваря менюто, изобразено на Фиг. 6. В него избираме опцията 

, чрез която се извежда следата на P, когато t се мени. Тази следа е кривата линия на Фиг. 7. Тя показва кога d е най-малко. При стойност на плъзгача t = 2.325 точката P е наблизо до най-ниската част на тази крива. В този случай ГеоГебра дава като стойност на втората координата на P числото d = AB = 7.0241 метра. При t = 2.288 получаваме d =7.02348 метра, което число можем да приемем за още по-добро приближение на най-късата отсечка с краища върху координатните оси и минаваща през M. Тъй като отговорът се търси в сантиметри, като отговор на задачата можем да запишем 702 см.

Забележка. Характерът на кривата линия на Фиг. 7 показва, че решението на задачата е единствено. Няма друга отсечка, минаваща през M, която да е със същата минимална дължина.

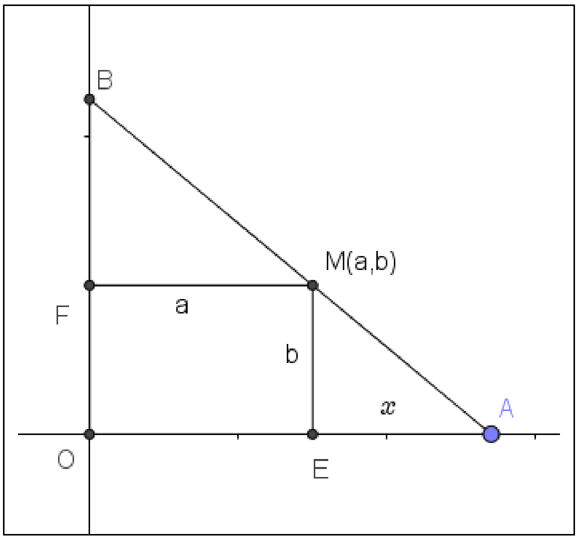


Фиг. 6



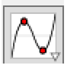
Фиг. 7

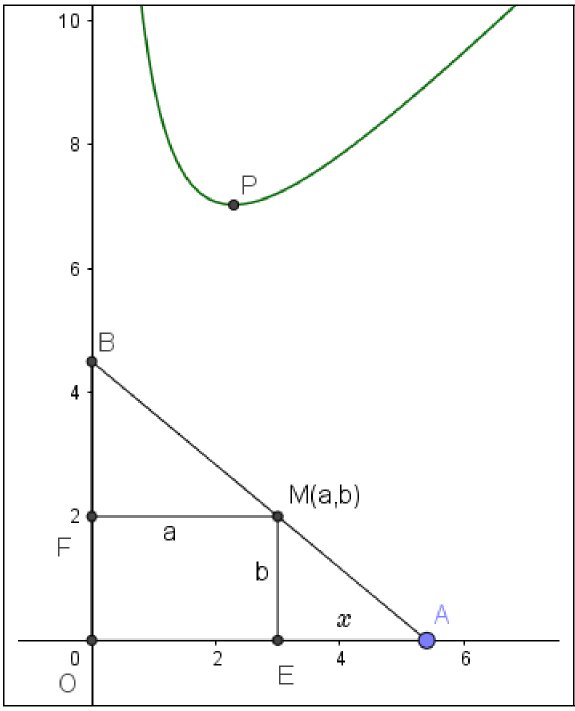
Задачата може да се реши и по други начини. Тук ще изложим един от тях, който ще ни помогне да решим и следващата задача. Той се основава на подобието на триъгълници. На Фиг. 8 е изобразен общият случай, когато точката M има координати a и b. Чрез x тук е означена дължината на отсечката EA. Дължината на отсечката AM е $\sqrt{x^2+b^2}$ (теорема на Питагор). От подобието на триъгълниците EAM и FMB следва,



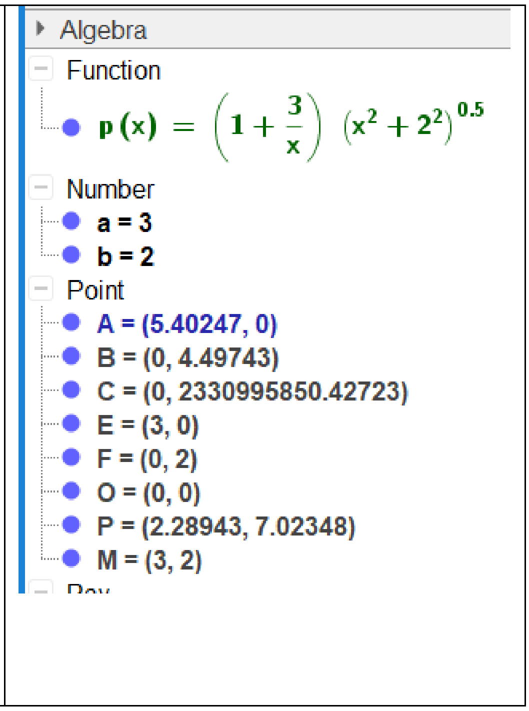
Фиг. 8

че $\frac{MB}{MA} = \frac{a}{x}$. Т.е. $MB = \frac{aMA}{x}$. Следователно, $AB = AM + MB = MA(1+\frac{a}{x}) =$

$= \sqrt{x^2+b^2}(1+\frac{a}{x})$. Виждаме, че при зададени стойности на a и b дължината на отсечката AB е функция на x, която може да бъде изследвана с инструментите на Геогебра. В частност, може да бъде намерена нейната минимална стойност. В задача 1 имаме a = 3 и b = 2. Графиката на функцията при тези стойности на a и b е изобразена на Фиг. 9. Тя, разбира се, е същата, като графиката, изобразена на Фиг. 7. Същият е и смисълът на точката P върху тази графика. Тя е разположена в най-ниската част на графиката. Втората координата на P дава най-късата възможна дължина на отсечката AB. Разликаата между Фиг. 7 и Фиг. 9 е, че точката P във фигура 9 е получена с натискане на бутона Extremum , който е предпоследен във втората колона от бутони, и след това щракване с мишката върху графиката на функцията на Фиг. 9. Координатите на точката P могат да се видят в алгебричния прозорец, част от който е изобразен на Фиг. 10. Оказва се, че намереният сега резултат съвпада с получения по--горе. Минималната дължина на отсечката AB е 7.02348 метра. За да намерим мястото на точката A, при което отсечката AB ще е най-къса, трябва към a = 3 да добавим 2.28943 (първата координата на P). Т.е., когато A има координати (5.28943,0), отсечката AB ще е най къса.



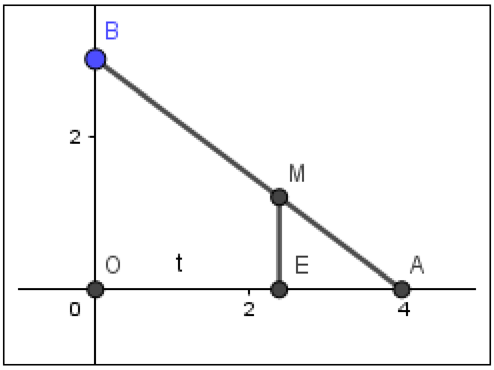
Фиг. 9



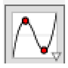
Фиг. 10

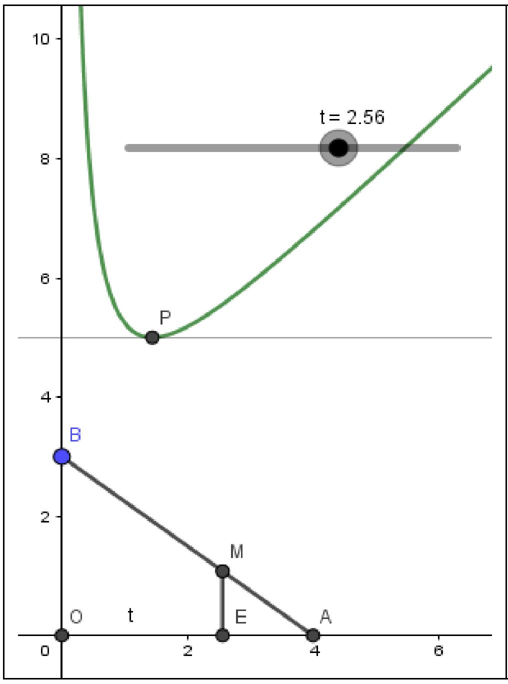
Ако направим експерименти с други стойности за a и b, ще видим, че характера на графиката на функцията не се променя. Т.е., задачата отново има единствено решение.

Решение на Задача 2. Най-простото нещо, което може да се предприеме за решаването на тази задача, е да се „опитват“ различни точки M(a,b) от отсечката AB и за всяка от тях поотделно да се решава задача 1. Този подход е разумен, но реализирането му може да отнеме много време. ГеоГебра дава възможност едновременно да се изследват всички точки M от отсечката AB. Въвеждаме плъзгач за променлива t , която да се мени между 0 и 4. За първа координата на M вземаме числото a = t = OE (Фиг. 11). От подобието на триъгълниците EAM и OAB, за втората координата на точка M от AB получаваме EM = b = $\frac{3}{4}(4-t)$. При така избраните a и b разглеждаме

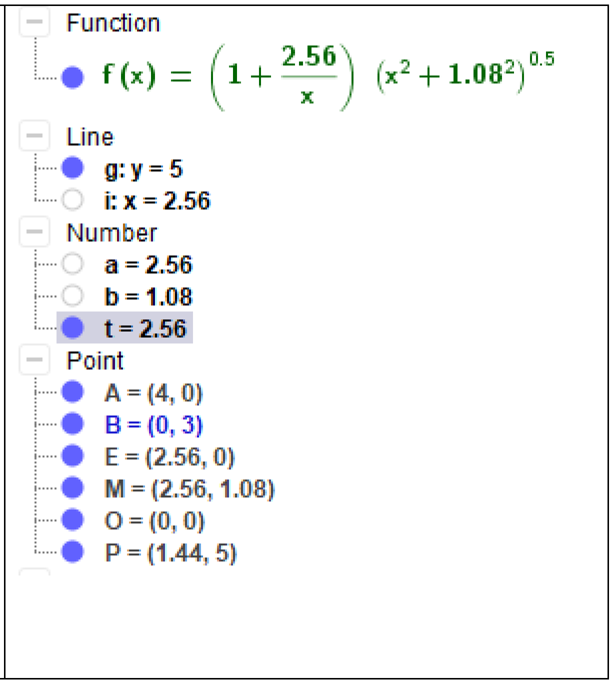


Фиг. 11

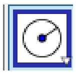
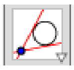
функцията $\sqrt{x^2+b^2}(1+\frac{a}{x})$ и намираме, както по-горе с бутона Extremum  , нейния минимум (втората координата на точката P). Ако за някое t се окаже, че този минимум е равен на 5, колкото е дължината на AB, то съответната на това t точка M(t, $\frac{3}{4}(4-t)$) ще е решение на Задача 2 (поради единствеността на решението на Задача 1 за такава точка M). Тази идея е реализирана в следния помощен файл (reshenie na zadacha 2). На Фиг.12 и Фиг.13 се вижда, че при t = 2.56 втората координата на P е равна на 5. Следователно, търсената точка M има координати (2.56, 1.08) в метри. Търсеният отговор за ординатата на M в сантиметри е 108.

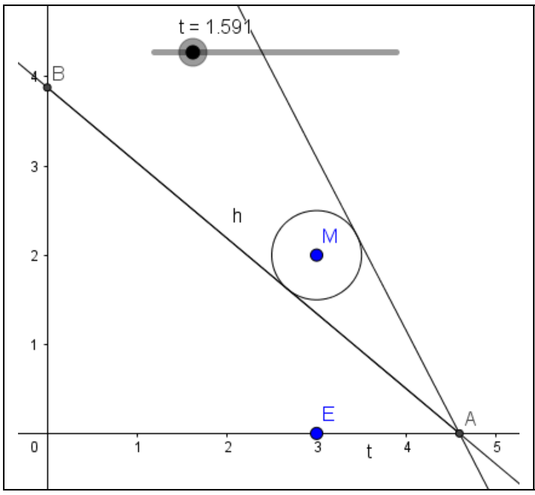


Фиг. 12

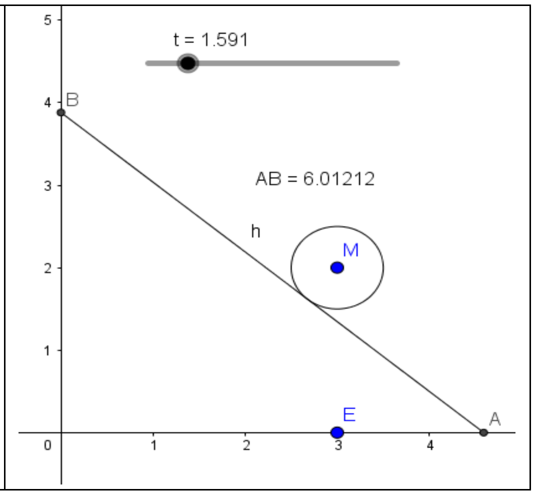


Фиг. 13

Решение на Задача 3. Построяването на ГеоГебра-файл за изследване на тази задача е лесно. Най-напред въвеждаме точка M(3,2). След това, с бутона  построяваме окръжност с център M и радиус 0.5. Отбелязваме точка E(3,0) и въвеждаме плъзгач за променливата t . Избираме върху абсцисната ос точка A така, че разстоянието между A и E да е t. Следователно, точка A е с координати A(3 + t, 0). С бутона  построяваме допирателните от A към построената окръжност (Фиг. 14) и означаваме с B пресечната точка на долната допирателна с ординатната ос. Интересува ни поведението на дължината на отсечката AB, когато с помощта на плъзгача точката A мени позицията си. На Фиг. 15 двете тангенти „са скрити“. Оставена е само отсечката AB и е изведена нейната дължина. Така построеният помощен файл е запазен с името reshenie na zadacha 3. С негова помощ може да се намери t , за което дължината на отсечката AB е минимална. Оптималната ситуация е изобразена на Фиг. 15. Най-късата отсечка AB, която се допира до окръжността има дължина 6.01212 метра. Тя се получава при t = 1.591. Точката A в този случай е с координати A(4.591,0). Като отговор на задачата следва да се запише 601(сантиметра).

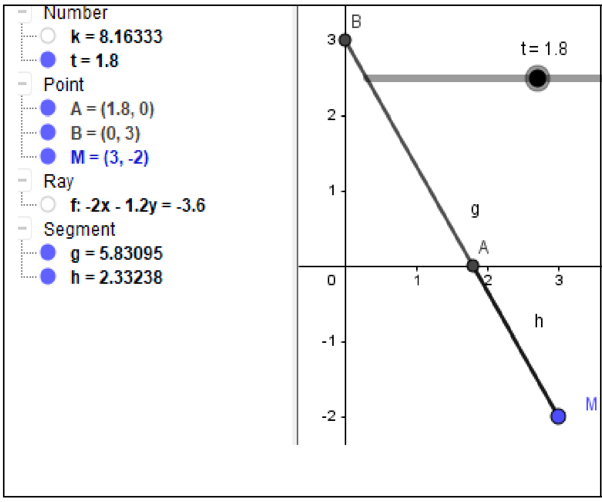


Фиг. 14

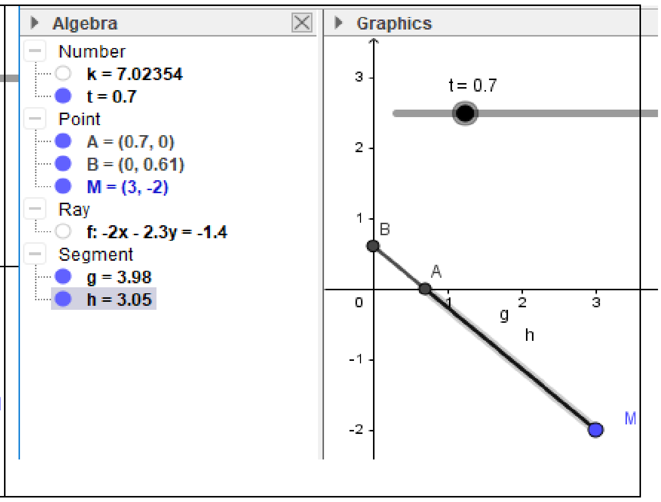


Фиг. 15

Решение на Задача 4. Ще предложим три решения на тази задача. Първото е с пряко използване на функционалностите (бутоните) на ГеоГебра. Построяваме файл ([reshenie na zadacha 4]) за изследване на тази задача. В него плъзгач за променливата t определя положението на точка A(t , 0). Прекаран е лъч с начало в M(3, -2), минаващ през точка A. Лъчът пресича ординатната ос в точка B. Построяват се отсечките MA и MB. Техните дължини се виждат в алгебричния прозорец като величините h и g съответно. Сумата на h и g е означена с k. На Фиг. 16 k = 8.16333 метра. Оптималната ситуация е изобразена на Фиг. 17. Там виждаме, че k = 7.02354 метра. Като отговор на задачата следва да се запише 702 сантиметра.



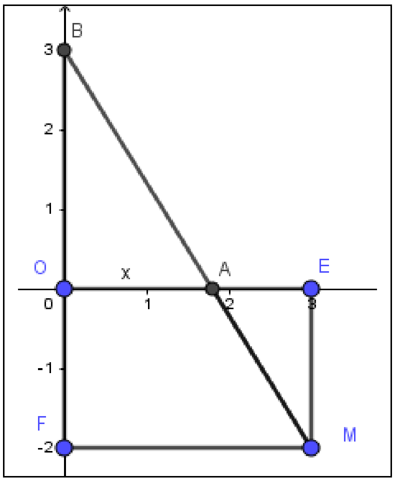
Фиг. 16



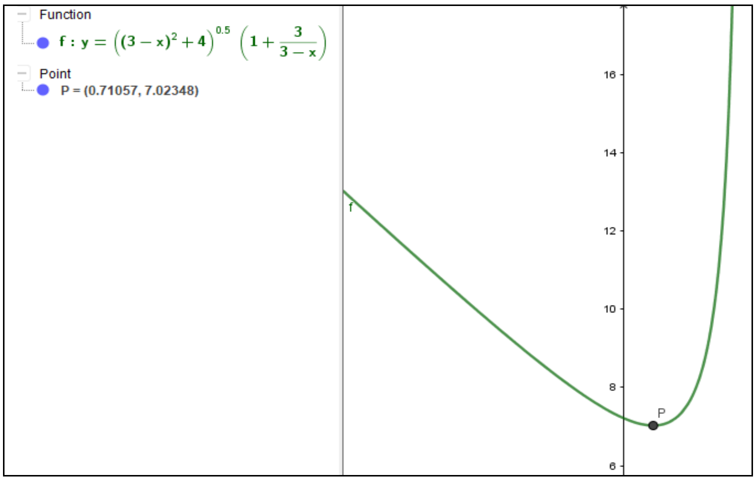
Фиг. 17

Второто решение е основано на подобието на триъгълниците FMB и AME от Фиг. 18 и на питагоровата теорема. От подобието следва $\frac{MA}{3-x} = \frac{MB}{3}$. Т.е. $MB = \frac{3}{3-x} MA$. Знаем, че $MA = \sqrt{(3-x)^2 + 2^2}$. Получаваме

$MA + MB = MA\left(1 + \frac{3}{3-x}\right) = \sqrt{(3-x)^2 + 2^2}\,(1 + \frac{3}{3-x})$. Последният израз е функция на x, която може да бъде изследвана с инструментите на ГеоГебра. Графиката ѝ и точката на минимум P са изобразени на Фиг. 19. Отговорът отново е 702 сантиметра, разбира се.

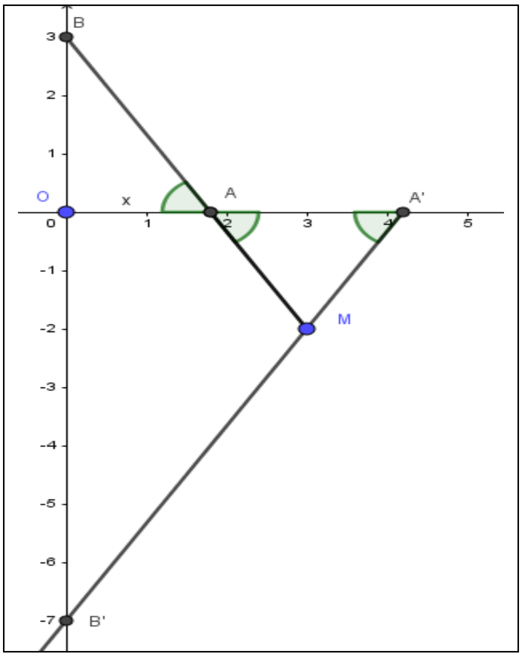


Фиг. 18



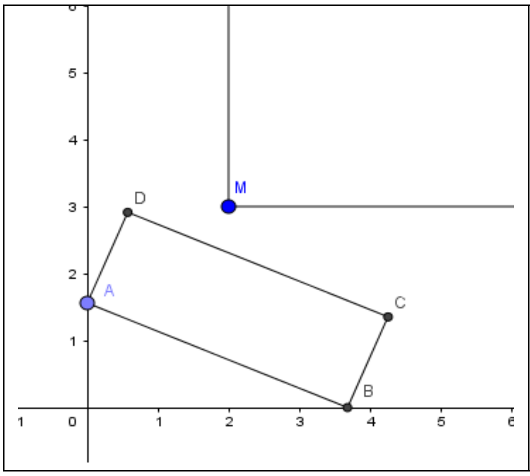
Фиг. 19

Третото решение на задачата цели да покаже, че съвпадението на решението на задача 1 (702 см) и на задача 4 не е случайно. Да разгледаме Фиг. 20. На нея точката A´ е построена така, че MA = M A´, а точката B´ лежи на ординатната ос и на правата, определена от точките M и A´. Означените на фиг. 20 ъгли са равни. Следователно и допълнителните им до 90 градуса ъгли ABO и A´B´O също са равни. От тук следва, че MB = MB´. Виждаме, че MB + MA = MB´ + MA´ = A´B´. Сумата MB + MA ще е най-малка, когато A´ B´ е най-късата отсечка с краища върху координатните оси и минаваща през M. Това е точно задача 1, разглеждана в четвърти (а не в първи) квадрант.

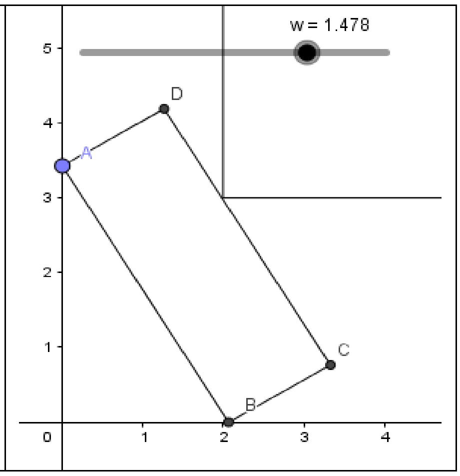


Фиг. 20

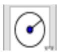
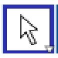
Решение на Задача 5. Ясно е, че проблемите с пренасянето на уреда са заради точката M(2,3), в която се пресичат вътрешните стени на коридорите (Фиг. 21). Ако уредът „избегне“ тази точка, пренасянето е възможно. Ясно е също така, че „задиране“ в точка M може да възникне само ако точка A е вече на ординатната ос, а точка B е на абсцисната ос. Затова ще считаме, че A и B са върху съответните оси.



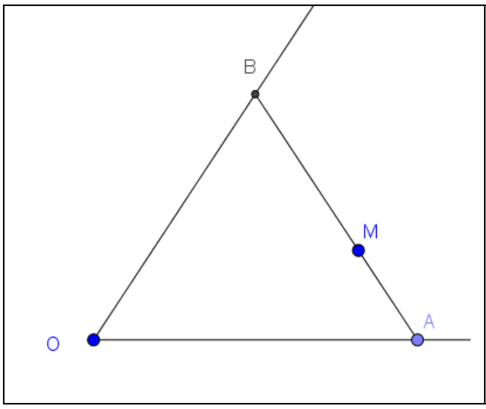
Фиг. 21



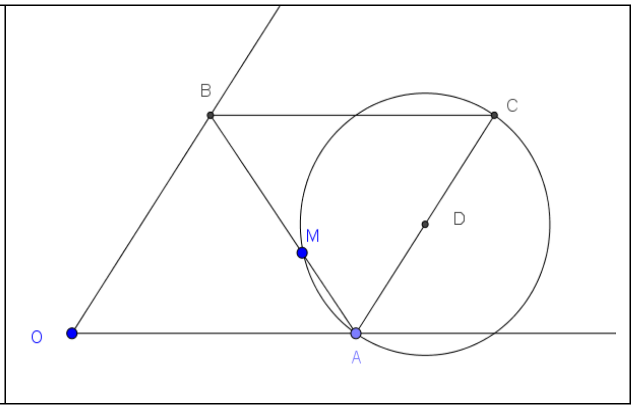
Фиг. 22

Това подсказва как да се конструира файл (reshenie zadacha 5), с чиято помощ да се изследва тази задача. Взема се точка A от ординатната ос (с бутона ), която да е по-ниско от M. Построява се окръжност с център A и радиус 4 (чрез бутона ) и се означава с B пресечната точка на тази окръжност с положителната част на абсцисната ос. Въвежда се плъзгач за променливата w, която ще играе ролята на ширина на уреда. Построява се правоъгълник с основа AB и височина w (това може да стане по различни начини). При натиснат бутон  точката A може да се движи по ординатната ос. Заедно с нея се движи целият правоъгълник и визуално може да се проследи дали правоъгълникът ABCD ще засегне точката M. При w=1.478 правоъгълникът минава без да засегне точката M. Това е дало основание на част от участниците да запишат като отговор 148 сантиметра. От математическа гледна точка този отговор е правилен. 148 е най-близкото цяло число до точния отговор, който е приблизително равен на 147.91 сантиметра. При w=1.48 обаче, уредът не може да мине безпрепятствено. Когато втората координата на точката A стане 3.21468 точката M(2,3) е вече вътре в правоъгълника ABCD. Доколкото в задачата е записано „Каква е максималната ширина на уреда, при която придвижването може да се осъществи? Запишете отговора в сантиметри“, като отговор тук следва да се запише 147 сантиметра.

Идеята за тази тема възникна в разговор с Олег Мушкаров. Във връзка с европейския проект „Фибоначи“, посветен на Изследователския подход в образованието, Албена Василева през 2012 г. разработи образователна среда „Преместване на диван“, в която задача 1 е разгледана и изследвана в обща форма (с произволни ширини на коридорите) и е получена формула за оптималната дължина на отсечката AB (http://www.math.bas.bg/omi/docs/Sofa_moving/index.htm). Задача 1 е включена, даже в по-общата форма, когато коридорите се пресичат не обезателно под прав ъгъл, като задача 66 в книгата на *Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом* „ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА И ЗАДАЧИ НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ“. Във връзка с тази тема бе намерено едно нагледно геометрично условие за това, кога отсечката АВ е най-къса за случая, изобразен на Фиг. 23.



Фиг. 23



Фиг. 24

При зададено положение на отсечката АВ построяваме успоредника ОАСВ. На страната АС като на диагонал построяваме окръжност. За да е най-къса отсечката АВ, така построената окръжност трябва да съдържа точката М. С други думи, височината през върха С в триъгълника АСВ трябва да минава през точка М.

В обсъждането на тази тема, както бе казано по-горе, се включиха Олег Мушкаров, Петър Кендеров, Ивайло Кортезов, Младен Вълков и Тони Чехларова. Отговорността за окончателното формулиране на темата, описанието на решенията и подготовката на помощните файлове е на Петър Кендеров. Логото на темата е направено от Койя Чехларова. Уеб-поддържката и техническото осигуряване са дело на Тодор Брънзов и Георги Гачев.