Решения
на задачите от

Тема на месец април 2018 г.

В магазин за технически течности (дестилирана вода, водно стъкло, спирт, машинно масло и други) се използват пластмасови кутии с формата на прав кръгов цилиндър. В задачите по-долу ще изследваме как се променя мястото на центъра на тежестта на такава кутия в зависимост от обема и теглото на течността в нея. Ако кутията е оставена отворена, тя може да бъде съборена и течността да се разлее. Практиката показва, че кутията е най-стабилна когато центърът на тежестта (на кутията заедно с течността в нея) е възможно най-ниско. Прости съображения показват, че когато кутията е запълнена с течност до h – тия сантиметър от нейната височина, разстоянието $C(h)$ от нейния център на тежестта до основата на кутията, измерено в сантиметри, се определя по формулата

$$C(h) = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2\,W + H^2 w}{hW + Hw}\right) \cdot$$

В тази формула W е теглото в килограми на течността, когато кутията е пълна, w е теглото на празната кутия (също в килограми) и H е височината на кутията в сантиметри.

В първите четири задачи ще разглеждаме кутии с вместимост 1 литър, които са високи 20,5 cm и тежат 50 g.

За решаването на първите две задачи можете да използвате следния помощен файл.

Задача 1. Плътността на дестилираната вода е 1, т.е. един кубически сантиметър дестилирана вода тежи 1 грам. Намерете височината $C(h)$ на центъра на тежестта на кутията, ако в нея е налята дестилирана вода до 10-тия сантиметър.

Запишете отговора с точност до стотни от сантиметъра

Задача 2. Намерете височината в сантиметри на повърхнината на дестилираната вода в кутията, когато центърът на тежестта е най-ниско.

Запишете отговора с точност до стотни от сантиметъра

Задача 3. Каква е най-малката стойност на височината на центъра на тежестта, ако в празната кутия наливаме не дестилирана вода, а водно стъкло? (Известно е, че плътността на водното стъкло е 2,4 грама на кубичен сантиметър).

Запишете отговора с точност до стотни от сантиметъра

Задача 4. Колко грама водно стъкло трябва да налеем в празната кутия, за да бъде центърът на тежестта най-ниско?

Запишете отговора с точност до стотни от грама

Задача 5. Спиртът се продава в половинлитрови кутии с тегло 40 грама. Той има плътност 0.79 грама на кубически сантиметър. Известно е, че най-ниският център на тежестта на кутия със спирт е на 2 сантиметра от дъното. Какъв е радиусът на основата на кутията?

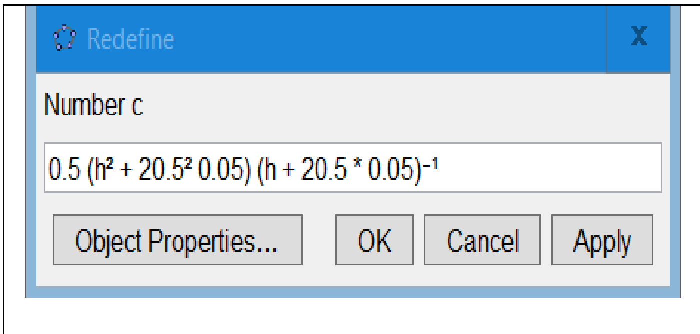
Запишете отговора с точност до хилядни от сантиметъра.

Отговори на задачите от темата

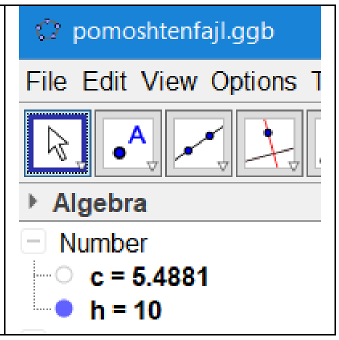
Задача	Отговор
1	5.49
2	3.67
3	2.56
4	300
5	4.303

Решение на Задача 1.

Данните в тази задача са h = 10 cm, W=1kg , H= 20.5 cm, w = 0.05 kg. С двойно щракване върху c в алгебричния прозорец на помощния файл се отваря изглед, в който се вижда въведена формулата за $C(h)$ при тези данни (Фиг. 1):



Фиг. 1



Фиг. 2

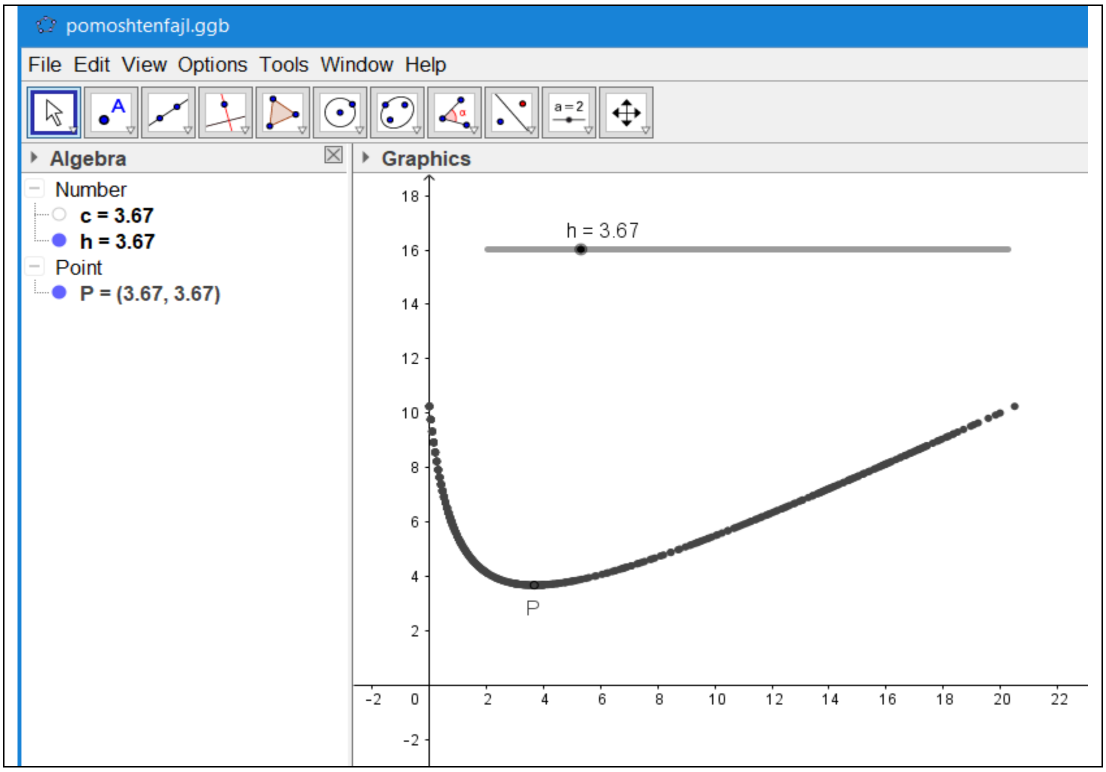
Остава да зададем h = 10. Това може да стане като внимателно нагласим плъзгача за h на стойност h = 10 или в алгебричния прозорец щракнем двукратно върху h и зададем h = 10. При това h помощният файл пресмята c = 5.4881 (Фиг. 2). Отговорът на задачата е 5.49 cm.

Разбира се, задачата може да се реши и без помощния файл, като директно във формулата за $C(h)$ поставим данните от тази задача и извършим пресмятанията при $h = 10$.

Решение на Задача 2.

Когато h = 0 (кутията е празна, в нея няма вода) помощният файл показва, че височината на центъра на тежестта е c =10.25 cm, т.е. съвпада със средата на кутията. Това съответства на интуитивните очаквания. Когато h = 20.5 (кутията е пълна), височината на центъра на тежестта отново съвпада със средата на кутията *c* =10.25 cm. Това също съответства на очакванияята. За да се проследи поведението на височината на центъра на трежестта за междинните състояния на *h* (между 0 и 20.5), в помощния файл е изведена и изобразена точка *P(h, C(h))* с координати *h* и *C(h).* Когато *h* пробягва интервала [0, 20.5], точката *P* описва крива в равнината, представена на Фиг. 3. От нея се вижда, че при постепенното запълване на кутията с вода (т.е. *h* расте) височината на центъра на тежестта първоначално намалява, а след това започва да нараства. Минимумът се достига някъде около *h* =3.67. Това число може да се запише като отговор на задачата.

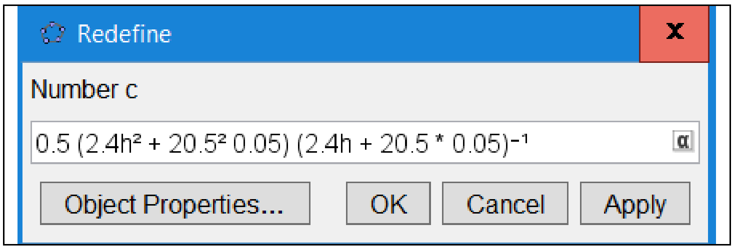
Тук прави впечатление фактът, че при височина на течността в кутията *h* = 3.67, най-ниският център на тежестта е на същата височина: *C(h)* = 3.67. Естествено е да си помислим, че става дума за случайно съвпадение. Ако обаче увеличим точността на пресмятанията с ГеоГебра до пети знак и последователно уточняваме следващите цифри в стойността на *h* , за която *C(h)* има минимална стойност, ще се убедим, че съвпадението не е случайно. При *h* = 3.67214 се получава по точен минимум за *C(h)* и този минимум отново е равен на 3.67214. Ако вникнем във физическата същност на ситуацията, този резултат е естествен. Той се потвърждава и ако използваме математически анализ за намиране на минимума на *C(h)* (чрез приравняване на нула на производната *C′(h)* на *C(h)* и решаване относно *h* на уравнението *C′(h)=0*).



Фиг. 3

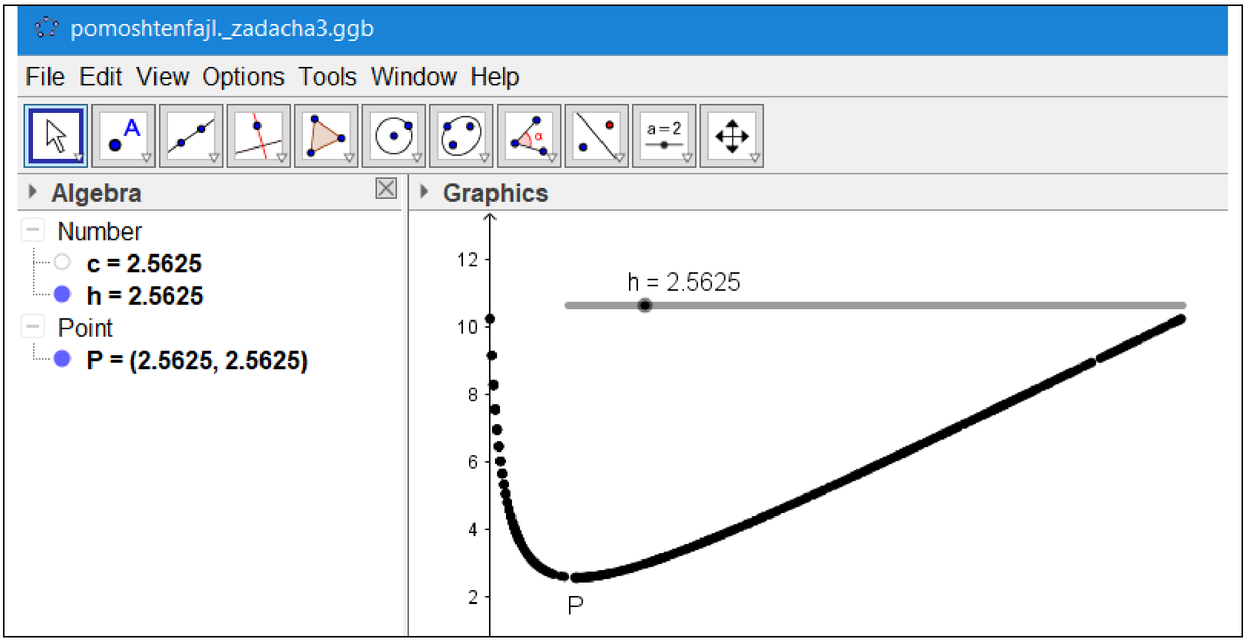
Решение на Задача 3.

Сега *W*= 2.4 kg. Трябва да видоизменим помощният файл, като във формулата за *C(h)* сложим *W*= 2.4 (в предишния файл имахме *W*=1). Резултатът може да се види на Фиг. 4 , а новият файл може да се отвори с щракване [тук](#).



Фиг. 4.

Търсенето на минимума на височината на центъра на тежестта става както в предната задача. Намираме, че той се достига при $h = 2.5625$. За тази стойност на h получаваме (Фиг. 5) $C(h) = 2.5625$. Т. е. отново има съвпадение на $C(h)$ и h, както в предната задача, за стойността на h, при която $C(h)$ си достига минимума.



Фиг. 5

Като отговор за тази задача следва да се впише числото 2.56.

Решение на Задача 4.

В предишната задача видяхме, че центърът на тежестта е най-ниско, когато височината на течността в кутията е h = 2.5625. Това е $\frac{2.5625}{20.5}$ части от течността в пълната кутия, която в този случай тежи 2.4 kg. Следователно, в кутията трябва да се налеят $\frac{2.5625}{20.5}2.4 = 0.3$ килограма водно стъкло. Като отговор на тази задача следва да се впише числото 300.

Забележка. Водното стъкло има две състояния - течно и твърдо. Дадената по-горе плътност 2.4 грама на кубичен сантиметър се отнася до твърдото състояние на стъклото. По-уместно и по-реалистично би било в задачи 3 и 4 да боравим с течното състояние на водното стъкло, което обаче няма точно определена плътност. При температура 20 градуса плътността на течното водно стъкло варира от 1.35 до 1.39 грама на кубичен сантиметър. Предоставяме на читателя сам да реши задачи 3 и 4 при плътност на водното стъкло в посочения интервал от 1.35 до 1.39 грама на кубичен сантиметър.

Решение на Задача 5.

Знаем обема на кутията (половин литър). Когато е пълна със спирт, теглото на течността в нея ще е $W = (0.5)(0.79) = 0.395\ kg$. Знаем и теглото на кутията $w = 0.04\ kg$. Ако намерим височина H на кутията, лесно ще намерим както лицето на основата (която е кръг), така и радиуса на този кръг. Да разгледаме функцията $C(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2\,W+H^2w}{xW+dw}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2\,0.395+H^2 0.04}{x0.395+H0.04}\right)$, където на H гледаме като на параметър, който следва да бъде определен от казаното в условието на задачата, че най-ниската височина на центъра на тежестта е 2 cm. Правим помощен файл на ГеоГебра, който изобразява графиката на функцията $C(x)$ при различни стойности на параметъра H, задавани чрез плъзгач. Подбираме стойност H на плъзгача, за която минимумът на $C(x)$ е 2. Резултатът е изобразен на Фиг. 6:

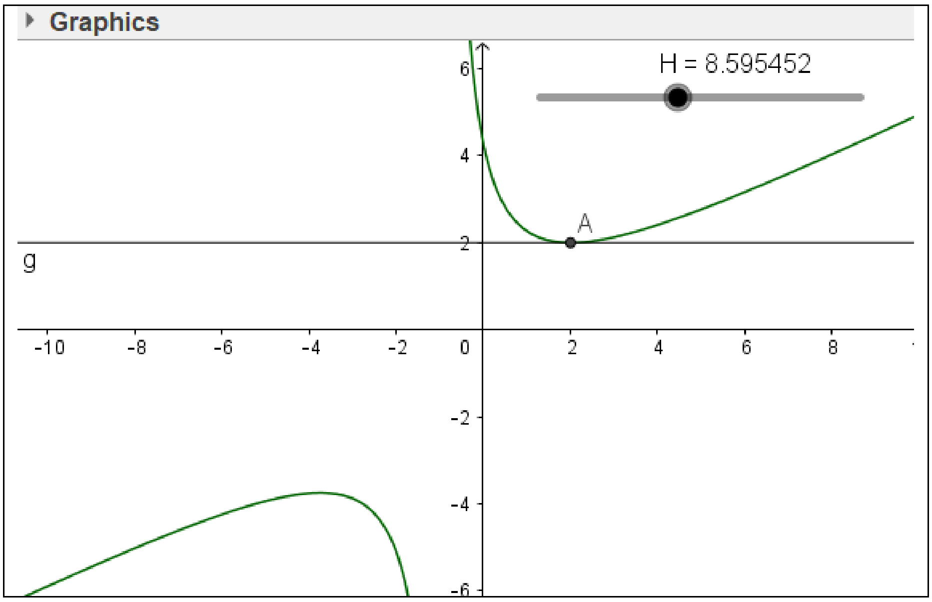


Fig. 6

Оказва се, че H =8.595452 cm. Остава да решим спрямо r уравнението $\pi r^2 8.595452 = 500$. Получаваме, че $r \approx 4.303$. Като отговор следва да запишем 4.303.

Друг начин да решим тази задача е да използваме установеното в предишните задачи свойство, че когато центърът на тежестта е най-ниско, за съответната височина h на течността се изпълнява равенството $C(h) = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2\,W+H^2w}{hW+Hw}\right) = h$. Това равенство позволява да намерим височината на кутията H , защото всички останали величини в него са известни: $h = 2, w = 0.04, W = 0.395$ kg. Всъщност, трябва да решим едно квадратно уравнение спрямо H. То има два корена, единият от които е отрицателен и няма отношение към решаването на задачата. За другия корен получаваме отново получаваме приблизителната стойност H = 8.59545 cm.

Отличен резултат (с максимален брой точки – 50) при трешаването на задачите постигнаха Александра Димитрова, Ани Динчева, Калоян Цветков и Румен Михов. Много добре (с поне 35 точки) се представиха Благой Манзуров, Катерина Костаадинова и Михаил Цветков.

Тази тема на месеца бе разработена по идея на Кирил Банков. В обсъждането и се включиха Петър Кендеров, Кирил Банков, Ивайло Кортезов, Тодор Мишонов и Тони Чехларова. Отговорността за окончателното формулиране на темата, описанието на решенията и подготовката на помощните файлове е на Петър Кендеров. Логото на темата е направено от Койя Чехларова. Уеб-поддържката и техническото осигуряване са дело на Тодор Брънзов и Георги Гачев.