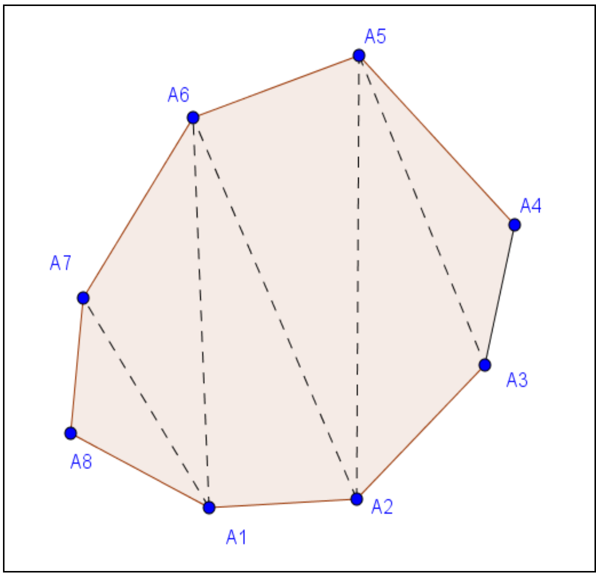
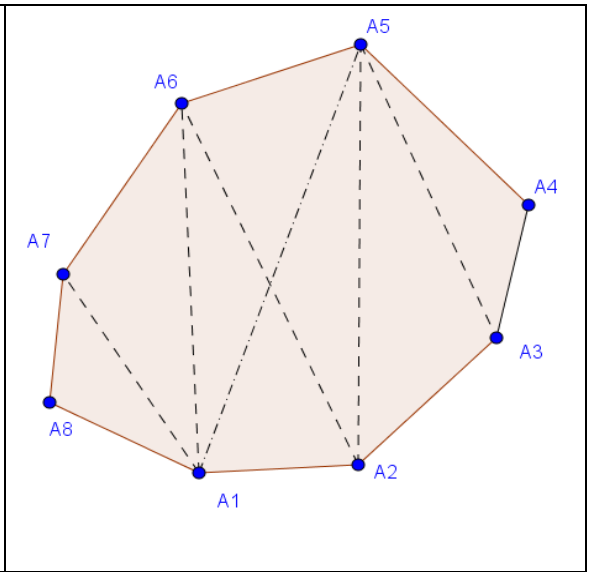
Решения на задачите от

Тема на месеца за м. март 2018

Даден е многоъгълник, който трябва да бъде нарязан на триъгълници. Разрязването става от „връх към несъседен връх“ и „открай до край“, без линиите на разрезите да се пресичат във вътрешна точка на многоъгълника. На Фигура 1 е показано едно допустимо (правилно) нарязване на осмоъгълник (пунктираните линии са разрезите). Фигура 2 е пример



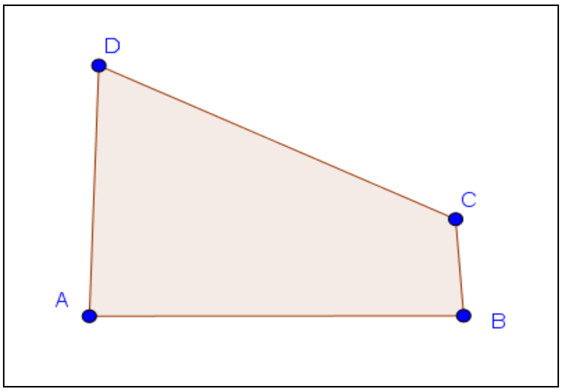
Фиг. 1



Фиг.2

на неправилно нарязване на същия многоъгълник, защото разрезите по диагонала A1A5 и по диагонала A2A6 се пресичат във вътрешна за многоъгълника точка.

Резултатът от нарязването на някоя фигура на триъгълници се нарича *триангулация* на фигурата. Тук ще разглеждаме само триангулации, получени по гореописания начин на рязане. Сумата от дължините на всички разрези, необходими за получаване на дадена триангулация, наричаме *дължина на тази триангулация*. Например, сумата на дължините на отсечките A7A1, A1A6, A2A6, A2A5, и A5A3 на Фигура 1 е дължината на представената на тази фигура триангулация на осмоъгълника. Сред всички триангулации на даден многоъгълник можем да търсим такава с минимална дължина (т.е. най-къса триангулация) или такава с максимална дължина (т.е. най-дълга триангулация). Ако изходният многоъгълник е



Фиг. 3

четириъгълникът на Фиг. 3, имаме само две триангулации. Едната се получава, като разрежем фигурата по диагонала AC, а другата – когато разрезът е по диагонала BD. Ако направим рязането по по-късия диагонал AC, получаваме триангулация с минимална дължина. Ако разрязването е по по-дългия диагонал BD, триангулацията ще е с максимална дължина.

Задача 1. Даден е петоъгълник с върхове в точките A1(3,2), A2(6,1), A3(9,3), A4(7,7), A5(3,6).

1 а) Каква е дължината на най-късата триангулация?

Запишете резултата с точност до стотните.

1 б) Каква е дължината на най-дългата триангулация?

Запишете резултата с точност до стотните.

Задача 2. Даден е правилен шестоъгълник със страна 5 см.

2 а) Каква е дължината на най-късата триангулация?

Запишете резултата с точност до стотните.

2 б) Каква е дължината на най-дългата триангулация?

Запишете резултата с точност до стотните.

Задача 3. Даден е шестоъгълник с върхове в точките A1(3,1), A2(7,1), A3(11,5), A4(9,8), A5(4,9), A6(2,6). Каква е дължината на най-късата триангулация?

Запишете резултата с точност до стотните.

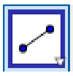
Отговори на задачите

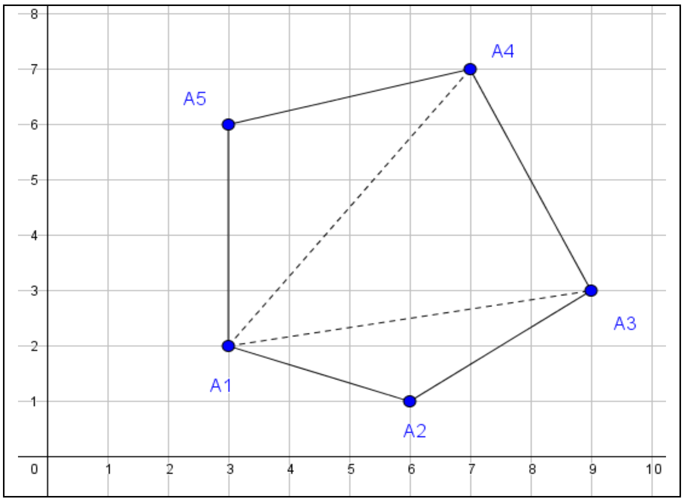
Задача	**Отговор**
1 а)	**11.91**
1 б)	**12.79**
2 а)	**25.98**
2 б)	**27.32**
3	**21.63**

Решение на Задача 1.

Петоъгълникът е изобразен на Фиг. 4. В този случай възможните триангулации са твърде прости. Една от тях е показана на Фиг. 4 с пунктирани линии. Двата диагонала излизат от върха A_1. Подобна триангулация има за всеки от върховете на петоъгълника. Че няма други допустими триангулации, можем лесно да се убедим. Каквито и три диагонала в петоъгълника да вземем, поне два от тях имат общ край (защото върховете на петоъгълника са 5, а краищата на трите диагонала са 6). Нека това е A_1. От този връх излизат само два диагонала A_1A_3 и A_1A_4. Третият диагонал на триангулацията ще има за свой край поне една от точките A_2 или A_5. Ако A_2 е негов край, то другият му край е или в A_5 или в A_4. И в двата случая този трети диагонал ще пресича диагонала A_1 A3 във вътрешна точка, а това е недопустимо за разглежданите от нас триангулации. По аналогичен начин разсъждаваме и когато третият диагонал има A_5 за свой край . Това противоречие показва, че допустимите триангулации са като изобразената на Фиг. 4.

До същия извод можем да стигнем и по друг начин. Ще считаме, че петоъгълникът е получен „като към четириъгълник е добавана още една точка“. На Фиг. 4 можем да считаме, че към върховете $A_1A_3A_4A_5$ е добавен още един връх A_2. Всяка триангулация на четириъгълника $A_1A_3A_4A_5$ става триангулация на петоъгълника $A_1A_2A_3A_4A_5$, ако към нея добавим диагонала A_1A_3. От друга страна, както видяхме по-горе - в условието на темата - за всеки четириъгълник има само две триангулации и това са диагоналите на четириъгълника. В случая това са диагоналите A_1A_4 и A_3A_5 . Следователно, всяка триангулация на петоъгълника, която съдържа диагонала A_1A_3 може да съдържа само още един от двата диагонала A_1A_4 и A_3A_5. И в двата случая става дума за триангулация от два диагонала, излизащи от връх на петоъгълника.

Дължината на всеки диагонал може да се намери с бутона  на ГеоГебра, като се използва следния [файл](). След това могат да се пресметнат дължините на допустимите триангулации, като сума от дължините на съответните диагонали. Най-къса се оказва триангулацията с два диагонала, излизащи от връх A_2. Тя има дължина 11.91 сантиметра. Това е отговорът на Задача 1 а). Най-дългата триангулация се състои от два диагонала, излизащи от връх A_3. Тя е с дължина 12.79 сантиметра. Това е отговорът на задача 1 б).



Фиг. 4

Разбира се, в дадения случай, когато върховете на петоъгълника имат целочислени координати, намирането на дължините на диагоналите може лесно да стане и с теоремата на Питагор: $A_1A_3 = \sqrt{37}, A_1A_4 = \sqrt{41}, A_2A_4 = \sqrt{37}, A_2A_5 = \sqrt{34}, A_3A_5 = \sqrt{45}$. Дължините на възможните триангулации са:

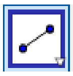
$$A_1A_4 + A_1A_3 = \sqrt{41} + \sqrt{37}\,,\ A_2A_5 + A_2A_4 = \sqrt{34} + \sqrt{37}\,,\ A_3A_1 + A_3A_5 = \sqrt{37} + \sqrt{45},$$

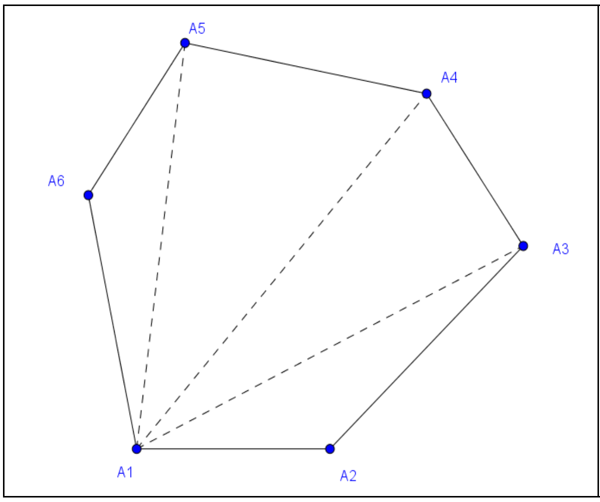
$$A_4A_2 + A_4A_1 = \sqrt{37} + \sqrt{41}\,,\ A_5A_2 + A_5A_3 = \sqrt{34} + \sqrt{45}\,.$$

Тези дължини се сравняват лесно „с просто око“. Най-къса е триангулацията, състояща се от диагоналите A_2A_5, A_2A_4 , а най-дълга – от диагоналите A_1A_3, A_5A_3. Остава да пресметнем с точност до стотните стойността на $A_2A_4 + A_2A_5 = \sqrt{37} + \sqrt{34} \approx 11.91$ и стойността на $A_1A_3 + A_5A_3 = \sqrt{37} + \sqrt{45} \approx 12.79$.

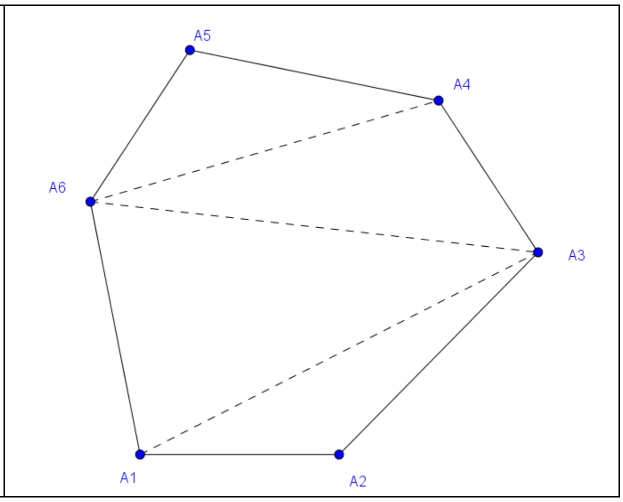
Решение на Задача 2.

За шестоъгълник възможните триангулации са много повече (общо 14). За да разберем защо това е така, ще си послужим с разсъжденията в Задача 2 и с шестоъгълника, изобразен на Фиг. 5а. Всяка триангулация на този шестоъгълник, която съдържа диагонала A_1A_3 ще триангулира и петоъгълника $A_1A_3A_4A_5A_6$. Ние обаче вече знаем как изглеждат триангулациите на петоъгълника. Те са общо 5 и са еднотипни: от всеки връх на $A_1A_3A_4A_5A_6$ излизат по два диагонала. Всяка от тях, заедно с A_1A_3 , образува триангулация на целия шестоъгълник. Тези възможни триангулации са представени на фигурите 5а – 5д. По подобен начин всеки от диагоналите A_2A_4 , A_3A_5 , A_4A_6 , A_5A_1 , A_6A_2 поражда 5 „свои“ триангулации на шестоъгълника. Много от тях обаче се повтарят и дори „потретват“. Не е трудно да се види, че различните са точно 14 на брой.

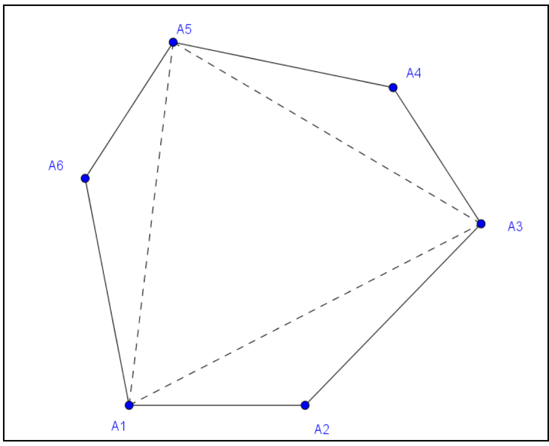
В Задача 2 шестоъгълникът е правилен и за него триангулациите от Фиг. 5а до Фиг. 5д са изобразени на фигурите от 6а до 6д. Всички останали триангулации на правилния шестоъгълник ще се получат от тях чрез последователно завъртане на 60° около центъра на многоъгълника. При завъртане дължините на триангулациите не се променят. Затова ще боравим само с дължините на триангулациите, представени с фигурите от 6а до 6д. Сравняването на дължините на тези триангулации е тривиално. Триангулацията на 5в се състои от три къси диагонала, докато във всички останали триангулации имаме два къси и един дълъг диагонал. С помощта на теоремата на Питагор не е трудно да се види, че всеки къс диагонал има дължина $2\sqrt{5^2 - 2.5^2} \approx 8.6603$, а дългия диагонал има големина 10 сантиметра. Същото може да се види и с бутона  на ГеоГебра като се използва следния [файл](). Затова дължината на триангулацията от 6в е приблизително равна на 25.98 09, а всички останали



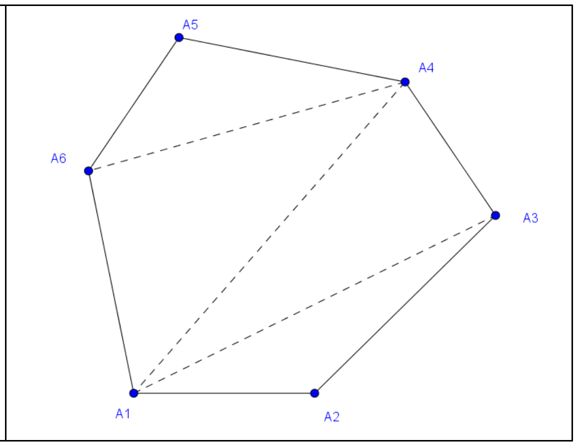
Фиг. 5а



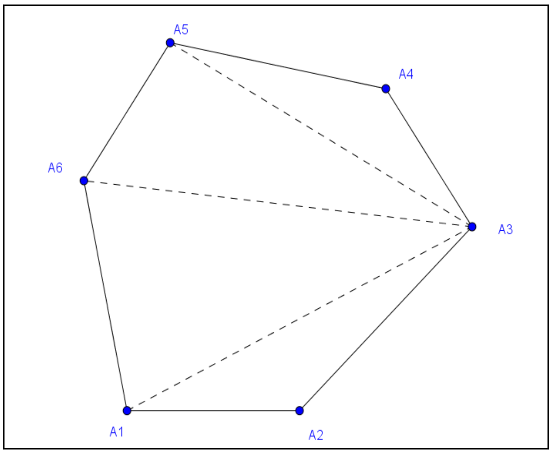
Фиг. 5б



Фиг. 5в

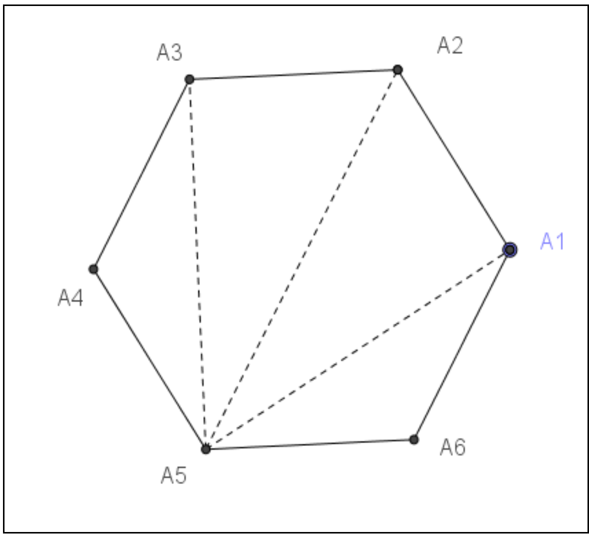


Фиг. 5г

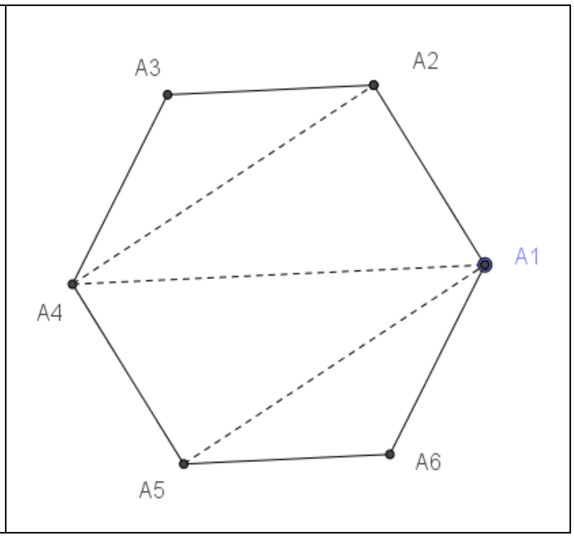


Фиг. 5д

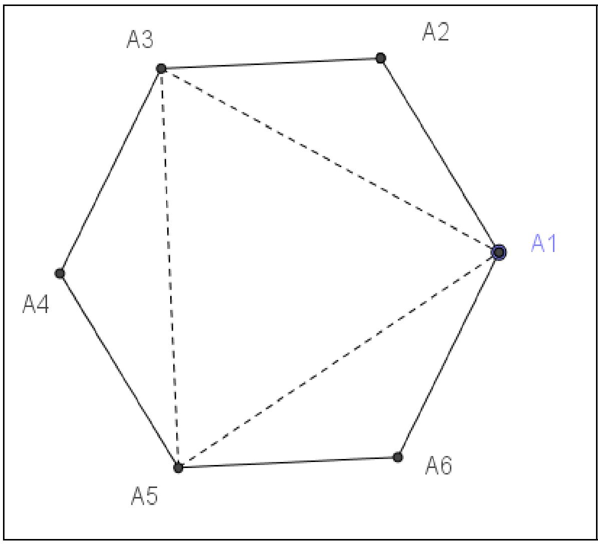
триангулации имат приблизителна дължина 27.3206. Следователно, отговорът на задача 2 а) е 25.98, а отговорът на задача 2 б) е 27.32.



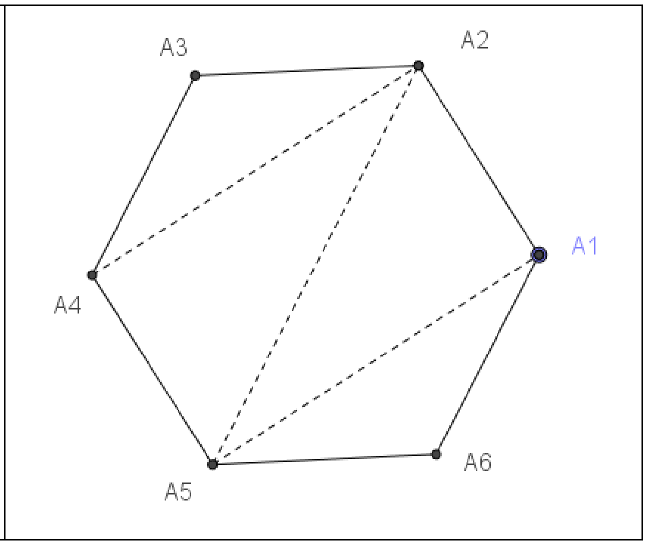
Фиг. 6а



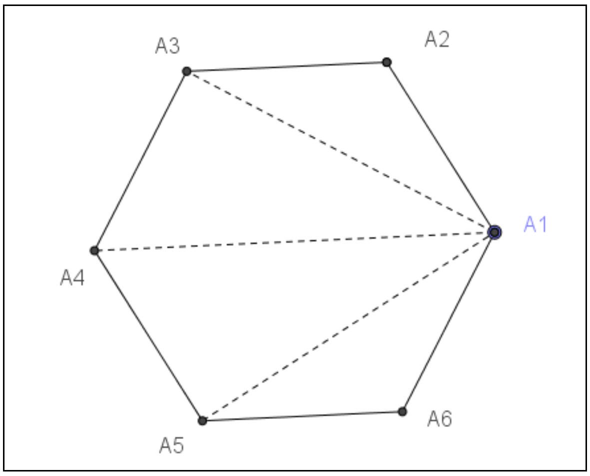
Фиг. 6б



Фиг. 6в



Фиг. 6г



Фиг. 6д

Решение на Задача 3.

Шестоъгълникът в тази задача не е правилен и за него трябва да се пресметнат дължините на всичките 14 триангулации. Измерването на дължините на диагоналите става с бутона  на ГеоГебра и с помощта на следния файл. Тъй като координатите на върховете на шестоъгълника сега са цели числа, теоремата на Питагор дава възможност дължините на диагоналите да се представят в много прегледен и лесен за сравняване вид - като квадратни корени на цели числа. След това се пресмятат дължините на 14-те триангулации и се сравняват една с друга. Най-къса се оказва триангулацията от тип 5в, която се състои от диагоналите A_2A_4 , A_4A_6 , A_6A_2 . С точност до стотните от сантиметъра, тя има дължина 21.63 сантиметра. Това е отговорът на задача 3.

Със задачите от тази тема отлично са се справили (с пълен брой точки - 50) Ани Динчева, Айлин Али, Катерина Костадинова, Калоян Цветков, Кирил Цанев, Любомир Костов, Пламен Иванов, Стефан Стоянов. Добър резултат (41 точки) е постигнал също и Михаил Цветков.

Броят на различните триангулации на един изпъкнал *n*-ъгълник се нарича число на Каталан (Catalan number) за този многоъгълник и се означава с C_n . Тези числа се появяват често и играят важна роля в комбинаториката и информатиката. За тях има обилна информация в интернет (виж, например, https://en.wikipedia.org/wiki/Catalan_number).

В обсъждането на тази тема се включиха Ивайло Кортезов, Тони Чехларова, Николай Николов и Петър Кендеров . Отговорността за окончателното формулиране на темата и описанието на решенията е на Петър Кендеров. Логото на темата е направено от Койя Чехларова. Уеб-поддръжката и техническото осигуряване са дело на Тодор Брънзов и Георги Гачев.