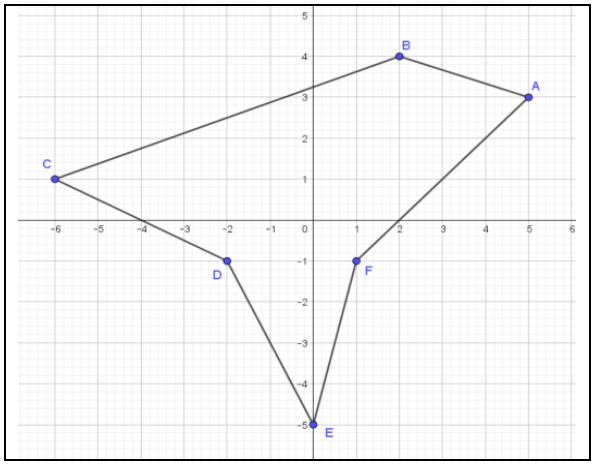
Решения на задачите от

Темата за 7 -8 клас

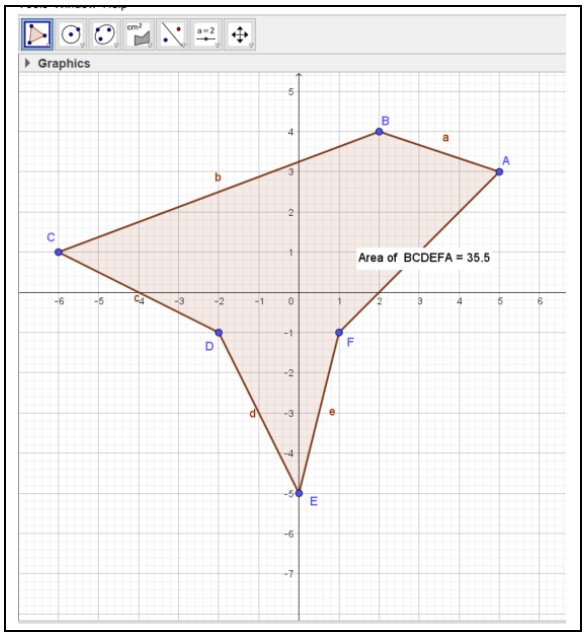
(на състезанието „ВИВА Математика с компютър“ от 06.12.2020 г.)

1. Намерете лицето на фигурата.



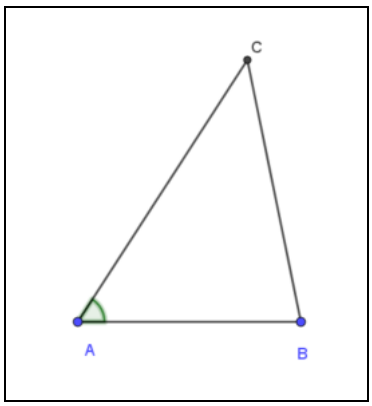
Помощен файл z1k78.ggb
Запишете отговора с точност до стотни.
Отговор: 35,5

Решение. В помощния файл към задачата активираме бутона и обхождаме многоъгълната фигура, като щракваме с левия клавиш на мишката последователно върху върховете на фигурата. Накрая щракваме още веднъж върху точката, от която сме тръгнали. В резултат на това действие фигурата се оцветява в бледо кафяво (Фиг. 7.1.1). Надписът Area of BCDEFA = 35.5 показва лицето на фигурата. Този надпис се извежда на екране след активиране на бутона за лице и щракване върху фигурата. Отговорът на задачата е 35,5.

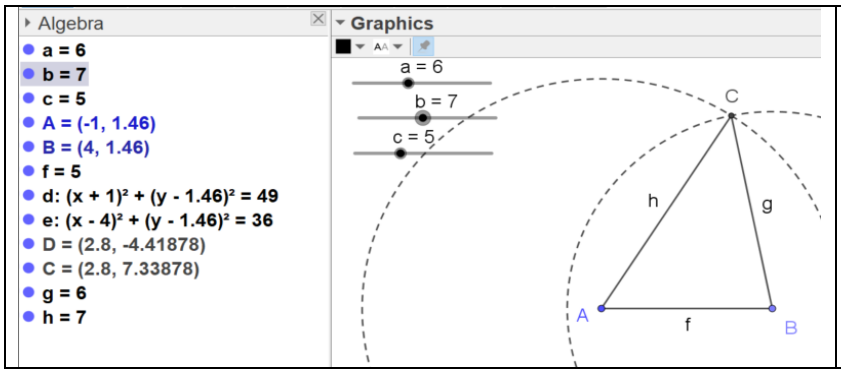


Фиг. 7.1.1

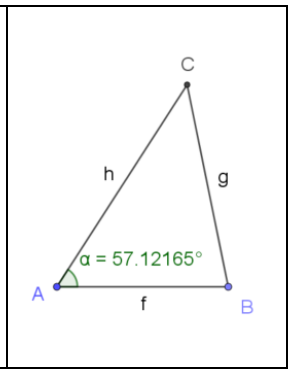
2. Дължините на страните на триъгълника ABC са AB = 5 cm, BC = 6 cm и CA = 7 cm. Колко е градусната мярка на ъгъл BAC?



Файл z2k78.ggb
Запишете отговора с точност до стотните.
Отговор: 57,12°
Решение. В помощния файл задаваме на плъзгачите стойности, които съответстват на размерите на страните на триъгълника (Фиг. 7.2.1). Градусната мярка на ъгъл BAC се получава с помощта на бутона за измерване на ъгли. След като го активираме и щракнем последователно върху върховете B, A и C, получаваме Фиг. 7.2.2, на която е изписана градусната мярка на търсения ъгъл. След закръгляне до стотните получаваме отговор на задачата 57,12°.



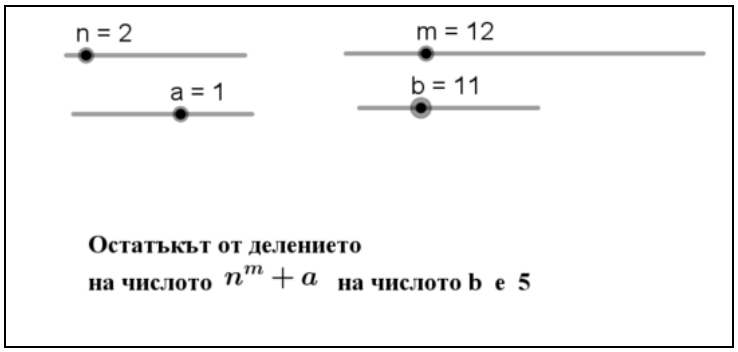
Фиг. 7.2.1



Фиг.7.2.2

3. Пресметнете частното $\frac{a}{b}$ на числата $a = 202 \ * 2022^{2020}$ и $b = 2020^{2021}$.
Запишете отговора с точност до стотни.
Отговор: 0,74
Решение. Опитът да се сметнат с ГеоГебра поотделно числата a и b и след това да се сметне частното $\frac{a}{b}$, не дава резултат. Числата a и b са твърде големи за ГеоГебра. При опит да се пресметне $b = 2020^{2021}$ (с командата 2020^202) отговорът е или ∞ или undefined (неопределено). Затова е добре да се направи пресмятане, което избягва големите числа. Една такава възможност дава представянето
$\frac{a}{b} = \left(\frac{2022}{2020}\right)^{2020} \frac{202}{2020} = \left(\frac{2022}{2020}\right)^{2020} \frac{1}{10}$. Изпълнението на командата (2022/2020)^2020 връща отговор 7,38175. Остава да разделим на 10 и да зкръглим до 0,74.

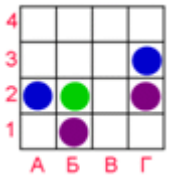
4. Намерете сумата от възможните остатъци при делението на числото $2^m + 3$ на 9.



Файл: z4k78.ggb

Отговор: 5 + 7 + 2 + 1 +8 + 4 = 27
Решение. В помощния файл нагласяваме плъзгачите да съответстват на условието на задачата ($n = 2, a = 3$). С местене на точката върху плъзгача за числото m виждаме, че възможните остатъци са 5, 7, 2, 1, 8 и 4. Сумата им е 27.

5. Таблицата трябва да се допълни така, че във всеки ред и във всяка колона да има кръгче от всеки от цветовете жълт, зелен, син, лилав.

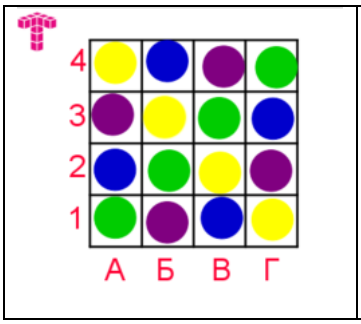


В кои от посочените полета може да има зелено кръгче?
Можете да посочите повече от един отговор

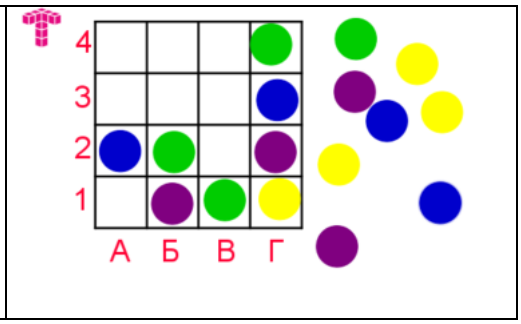
- ☐ А1
- ☐ А3
- ☐ А4
- ☐ В1
- ☐ В3
- ☐ В4
- ☐ Г1
- ☐ Г4

Помощен файл z5k78.ggb

Решение. Помощният файл позволява да проверим експериментално в кои от посочените квадратчета може да се сложи зелено кръгче. Когато поставим зелено кръгче в А1, следвайки изискването във всеки ред и във всяка колона да има по едно кръгче от всеки цвят, стигаме до картината представена на Фиг.7.5.1, която показва, че А1 е верен отговор. Напротив, разполагането на зелено кръгче във В1 води по необходимост до слагане на зелено кръгче в Г4 и жълто кръгче в Г1. Това води до Фиг. 7.5.2 , която показва, че в А1 трябва да се сложи синьо кръгче, а над него - в А2 - вече има синьо кръгче. Значи В1 не е решение на задачата.



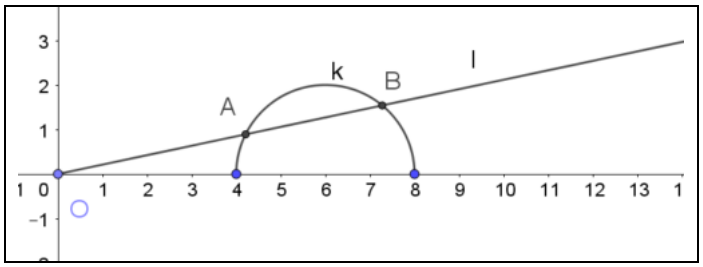
Фиг. 7.5.1



Фиг. 7.5.2

По аналогичен начн проверявме останалите възможности. Те са решения на задачата.

6. Отсечка с краища в точките P(4, 0) и Q(8, 0) е диаметър на полуокръжност k , лежаща в първи квадрант. Лъч l с начало в точката O(0, 0) , който сключва ъгъл $\alpha°$ с абсцисната ос, пресича k в точките A и B. Каква е градусната мярка на ъгъла α , за който дължината на отсечката AB е равна на 2?

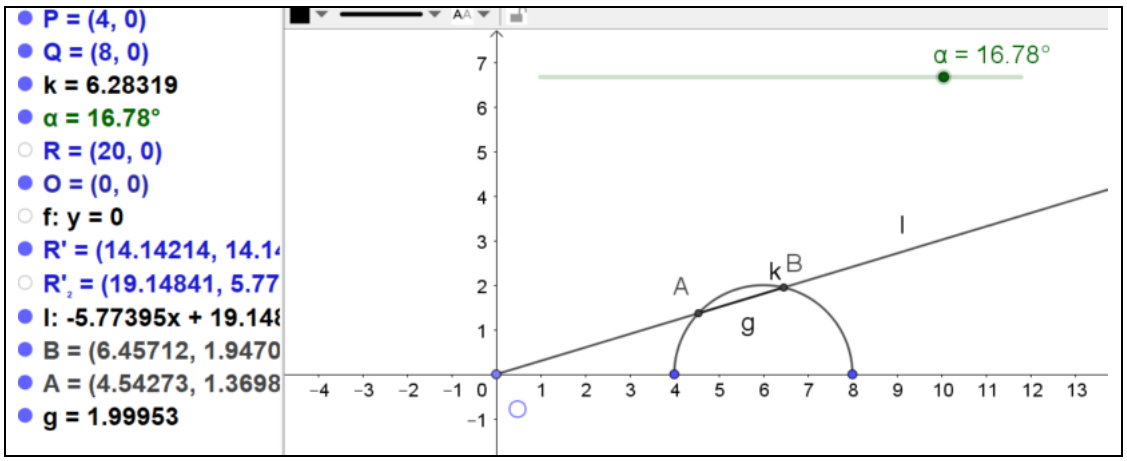


Запишете отговора с точност до десетите.

Отговор: 16,8

Файл z6k78.ggb

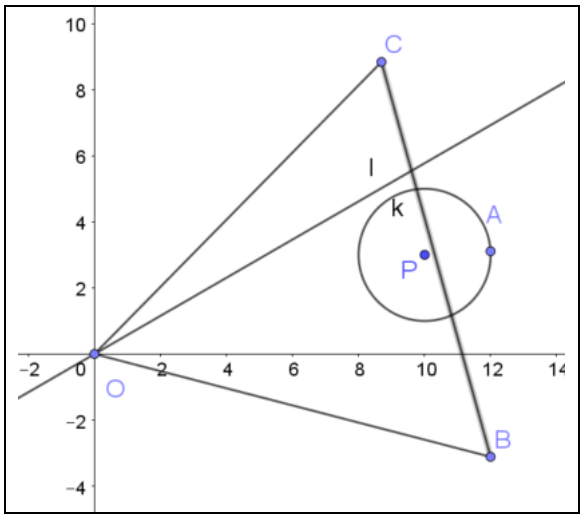
Решение. В помощния файл има плъзгач за ъгъла $\alpha°$, който правата l сключва с абсцисната ос. При местене на точката върху плъзгача се мени наклона на l и съответно дължината на отсечката AB. От участниците в състезанието се очакваше да измерят с бутона дължината g на отсечката AB и да нагласят ъгъла $\alpha°$ така, че $g = 2$. Това е направено на Фиг. 7.6.1:



Фиг. 7.6.1

След закръгляне до десетите получаваме като отговор 16.8.

7. Правата l минава през началото O(0, 0) на координатната система, лежи в първи и трети квадрант и сключва ъгъл 30° с абсцисната ос. Точка A е от окръжност k с център в точка P(10, 3) и радиус 2. Точка B е симетрична на A относно абсцисната ос, а точка C е симетрична на A относно правата l . Какво е най-голямото възможно лице на триъгълника OBC?

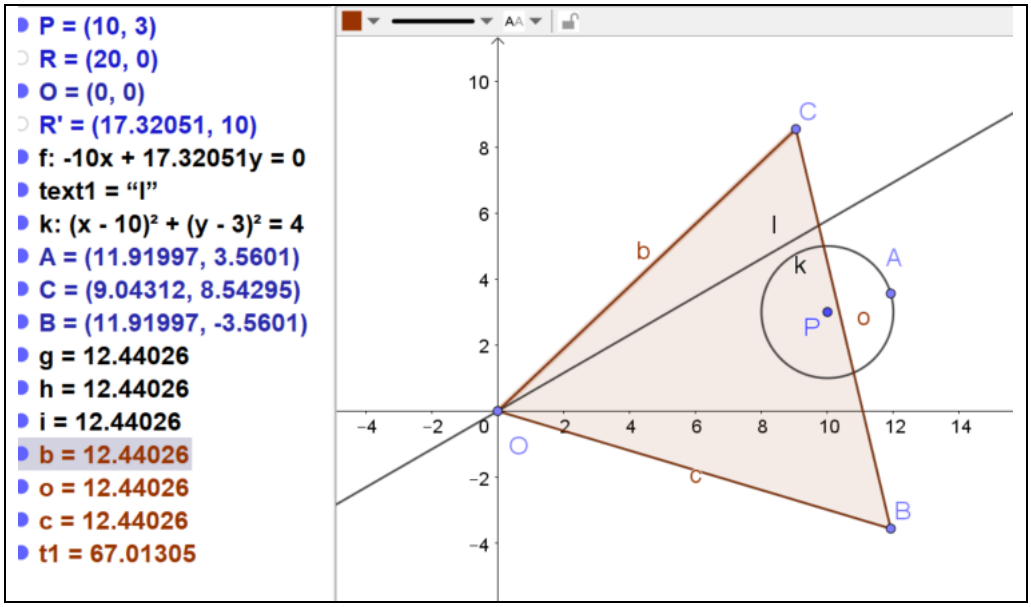


Запишете отговора с точност до стотните.

Помощен файл z7k78.ggb

Отговор: 67,01

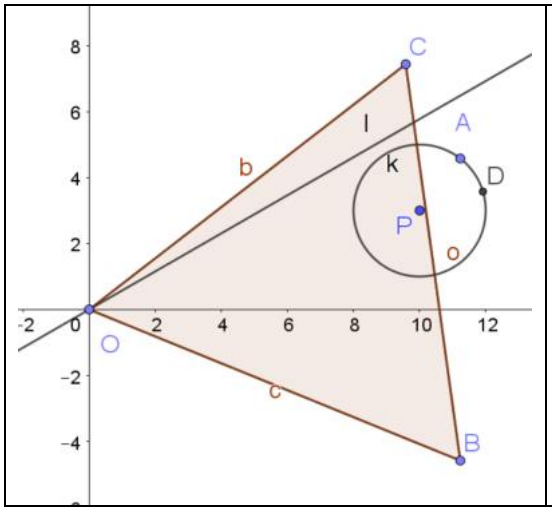
Решение. В помощния файл, при активиран бутон , щракваме последователно върху точките O, B, C и отново върху O. Това оцветява триъгълника OBC в бледокафяво и записва в алгебричния прозорец лицето му под името t1. При активиран бутон за движение можем да местим точката A по окръжността k , като едновременно следим за промяната на t1. На Фиг. 7.7.1 е показано положение на точка A, за което t1 е най-голямо: t1 = 67,01305. След закръгляне до стотните получаваме за отговор числото 67,01.



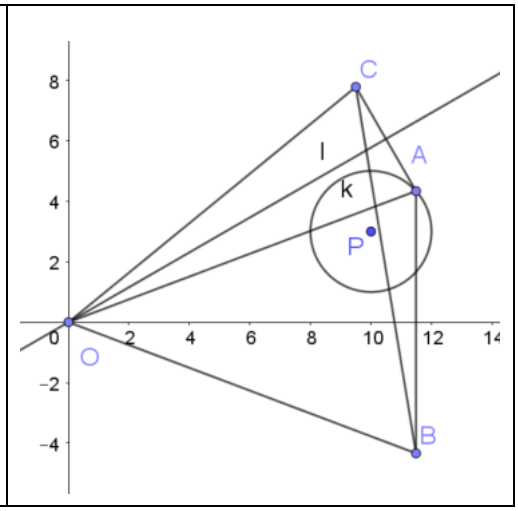
Фиг. 7.7.1

Задачата може да се реши много лесно и с командата

Maximize(<Dependent Number>, <Point on Path>), в която „Зависимото число“ **(<Dependent Number>)** е t1, а „Точката от пътя“**(<Point on Path>)** е точка A, която се движи по „Пътя“ k. Командата в нашия случай изглежда така **Maximize(t1, A**). Изпълнението ѝ извежда на екрана точка D от окръжността k, в която следва да попадне A, за да стане лицето t1 най-голямо (Фиг. 7.7.2).

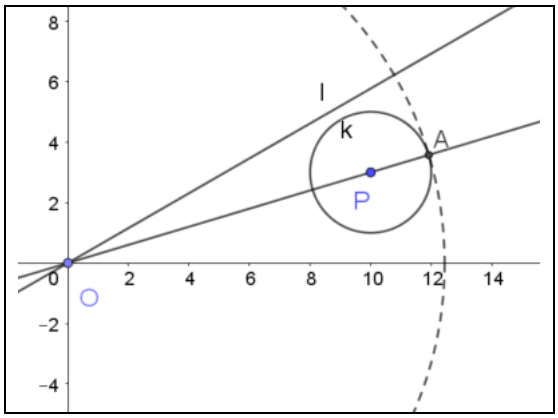


Фиг. 7.7.2



Фиг. 7.7.3

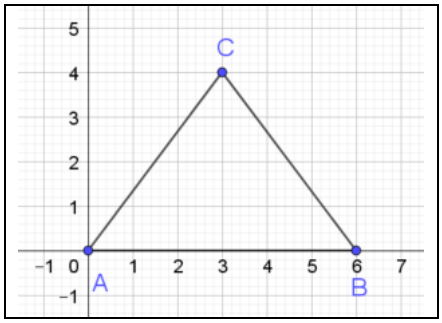
Задачата има и друго, „по-математическо“, решение. За него ни подсеща наблюдението, че при движението на точка A по окръжността k дължините на страните на триъгълника OBC (означени с b, c и o) са винаги равни помежду си. Т.е. OBC е равностранен триъгълник. Това не следва да ни учудва. От дефиницията на симетрия относно права е ясно, че OB = OA = OC. Значи триъгълникът OBC е равнобедрен. Освен това, отново поради дефиницията на симетрия относно права, ъгъл BOC е равен на 60° , защото е равен на удвоения ъгъл между правата l и абсцисната ос. Следователно, OBC е равностранен триъгълник със страна равна на OA. Най-голямо лице този триъгълник ще има, когато страната му е възможно най-голяма. Отсечката OA ще е най-голяма, когато точката A от k лежи на правата, определена от точките O и P (Фиг.7.74).



Фиг. 7.7.4

8. Даден е триъгълник ABC с върхове A(0, 0), B(6, 0) и C(3,4). Намерете такава точка M в първи квадрант, че лицата на триъгълниците ABC и ABM да са равни, а периметърът на

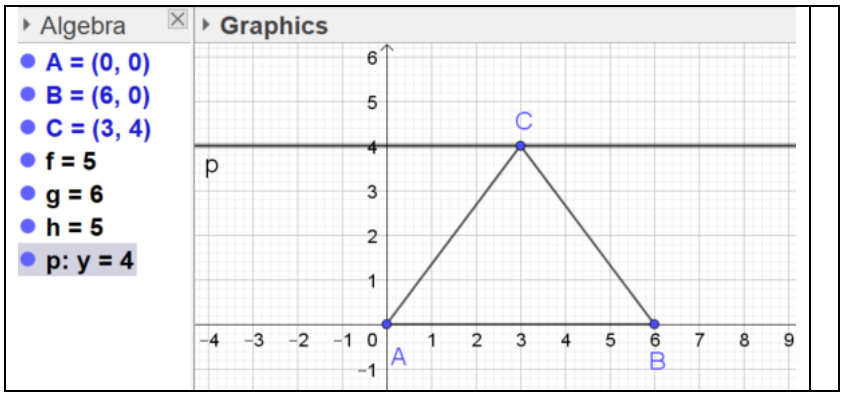
ABM да е два пъти по-голям от периметъра на ABC. Запишете с точност до стотните първата координата на точката M.



Файл z8k78.ggb

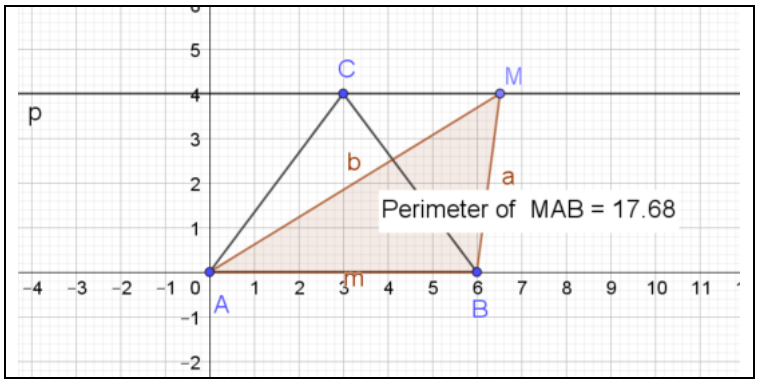
Отговор: 15,33

Решение. Триъгълниците ABC и ABM имат една и съща основа – AB. За да са равни лицата им, трябва височината от точка M в триъгълника ABM да е равна на височината от върха C на триъгълника ABC. Т.е. втората координата на M трябва да е равна на втората координата на точка C, а тя е 4. Значи точка M трябва да е върху права p успоредна на абсцисната ос и отстояща от нея на разстояние 4. Тази права може да се построи с командата y = 4 или чрез активиране на бутона и последователно щракване върху точката C и върху абсцисната ос. Резултатът е показан на Фиг. 7.8.1.



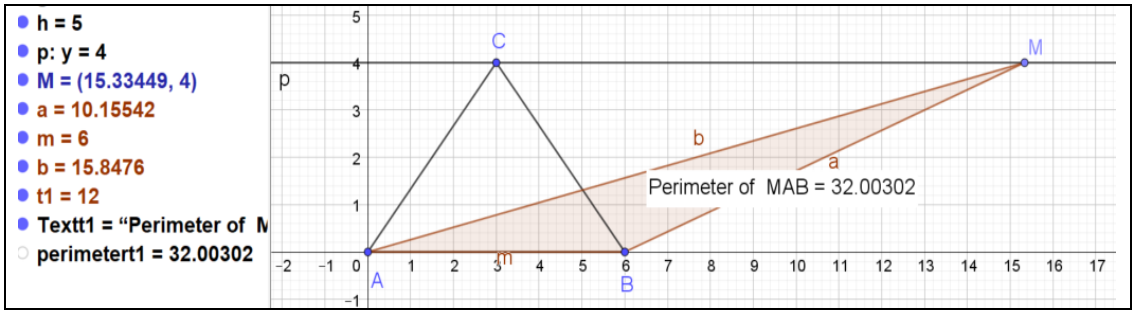
Фиг. 7.8.1

Активираме бутона и избираме произволна точка M от частта на правата p, която лежи в първи квадрант. Включваме бутона и построяваме триъгълника MAB.



Фиг. 7.8.2

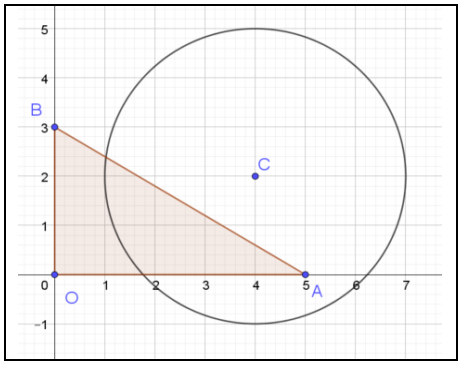
Той е показан на Фиг. 7.8.2. Периметърът му е изведен на екрана чрез включване на бутона и щракване върху триъгълника MAB. По същия начин (или пък с помощта на теоремата на Питагор) виждаме, че периметърът на ABC е 16. Остава да раздвижим точка M (при активиран бутон) и да намерим за нея положение, при което периметърът на MAB е 32. С достатъчна точност това е направено на Фиг. 7.8.3.



Фиг. 7.8.3

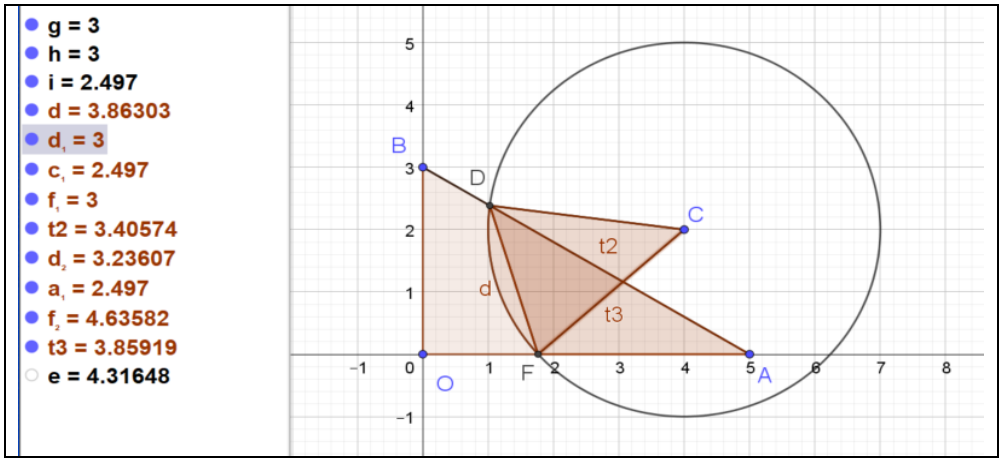
В алгебричния прозорец се вижда, че първата координата на точка M е 15,33449. Закръглянето до стотни дава отговора на задачата – 15.33.

9. Намерете лицето на общата част на триъгълник OAB с върхове O(0, 0), A(5, 0), B(0, 3) и кръг с център в точка C(4, 2) и радиус 3.
Запишете отговора с точност до стотните.



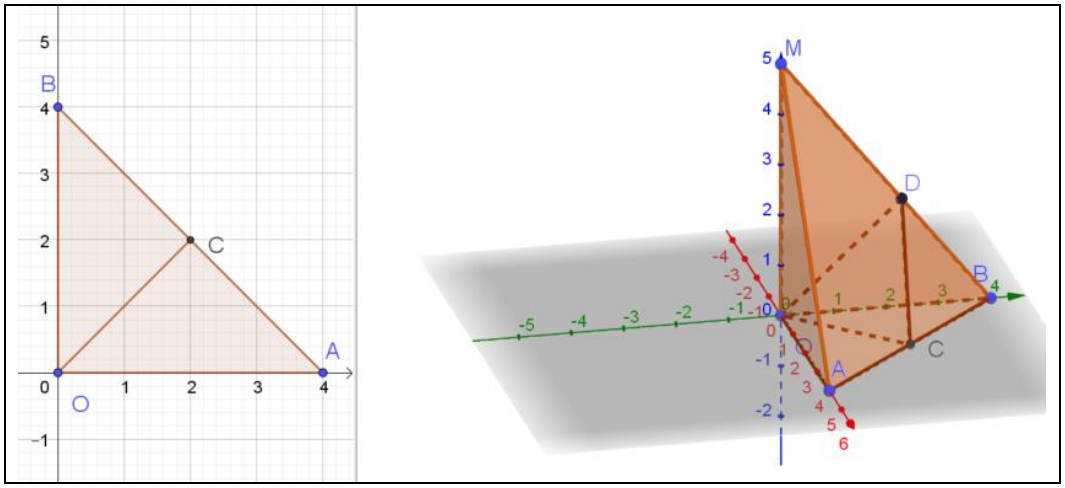
Помощен файл z9k78.ggb
Отговор: 4,32

Решение. На Фиг. 7.9.1 величината t3 е лицето на триъгълника ADF, d е лицето на кръговия сектор CDF, а t2 е лицето на триъгълника CDF. Тези величини са намерени чрез използване на бутоните и . Търсеното лице ле получава с командата e = t3 + d – t2. Резултатът е показан в най-долния ред на алгебричния прозорец: н e = 4,31648. След закръгляне до стотните получаваме отговора на задачата 4,32



Фиг. 7.9.1

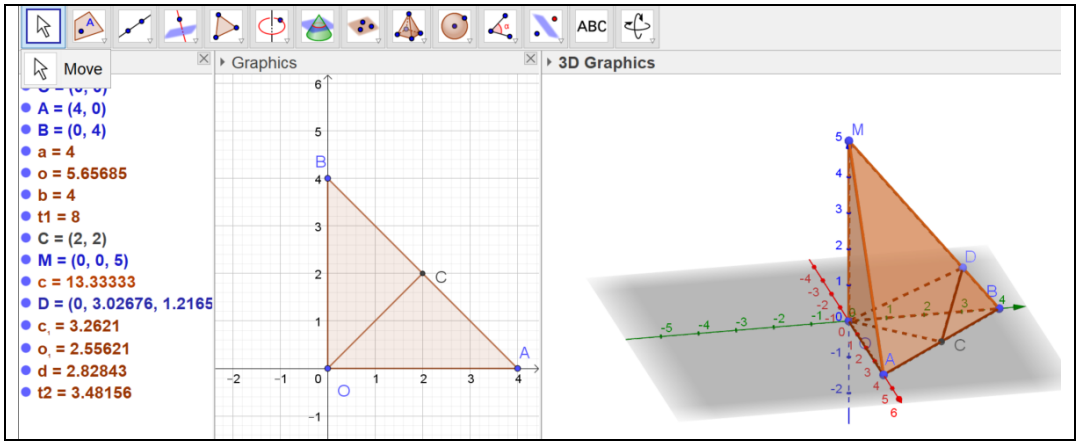
10. Триъгълникът с върхове O(0, 0), A(4, 0), B(0,4) е основа на пирамида с връх в точка M(0, 0, 5). Точка D е от ръба MB на пирамидата, а точка C е среда на отсечката AB. Какво е минималното възможно лице на триъгълника OCD. Запишете отговора с точност до стотните.



Файл z10k78
Отговор: 3.48

Решение. При включен бутон за избиране на точка от обект, избираме точка D от ръба MB на пирамидата. При включен бутон обхождаме с щракване върховете на триъгълника DCO. ГеоГебра пресмята лицето на триъгълника и го вписва след символа t2 в алгебричния прозорец на помощния файл. Активираме бутона за

движение и влачим точка M по ръба MB на пирамидата, като следим за промяната на числото t2 . Подбираме положение на точка D, при което t2 е възможно най малко. Резултатът е виден на Фиг. 7.10.1 : t2 = 3,48156. След закръгляне до стотните получаваме отговора на задачата – 3, 48.



Фиг. 7.10.1