# Решения на Задачите от

# Темата за 11 – 12 клас

# (на състезанието „ВИВА Математика с компютър“ от 06.12.202 г.)

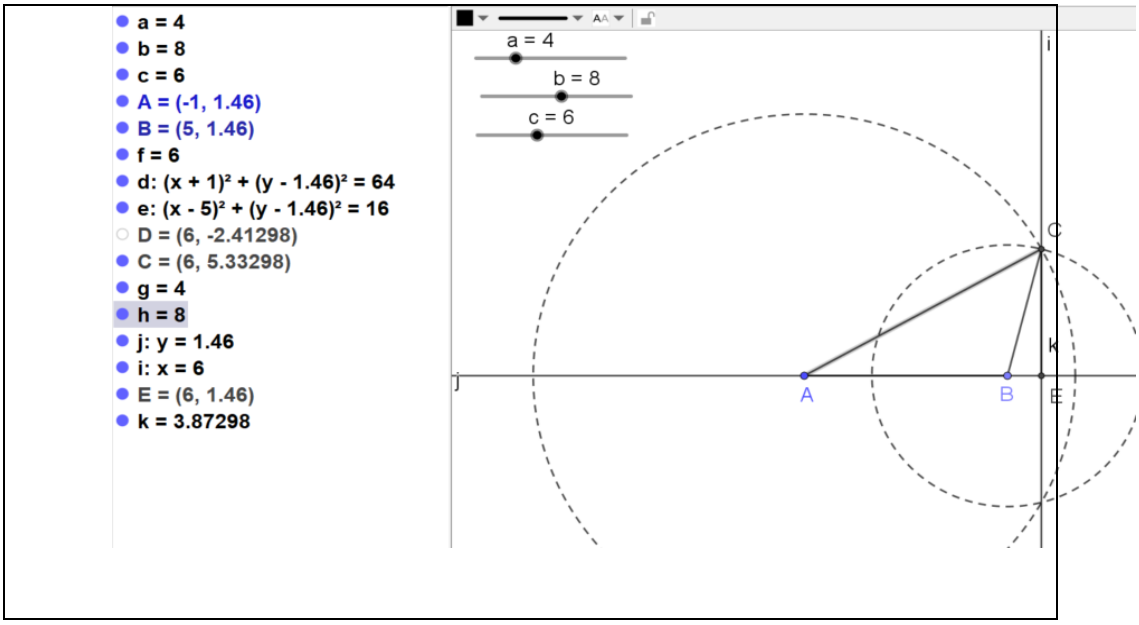
1. Дължините на страните на триъгълника ABC са AB = 6 cm, BC = 4 cm и CA = 8 cm. Каква е дължината на височината от върха C към основата AB?

   Запишете отговора с точност до стотни от сантиметъра.

   Файл: z1k1112.ggb

   Отговор: 3,87

**Решение.** В помощния файл задаваме на плъзгачите стойности, които съответстват на размерите на страните на триъгълника (Фиг. 11.1.1).




Фиг. 11.1.1

Получава се тъпоъгълен триъгълник. С бутона построяваме права през върха C, която е перпендикулярна на правата, определена от точките A и B и намираме (с бутона ) пресечната точка E на двете прави. Накрая, с бутона задаваме отсечката CE. ГеоГебра пресмята

автоматично нейната дължина и я записва в алгебричния прозорец като k = 3,87298. След закръгляне до стотните записваме като отговор 3,87.

2. Стойността на израза $\sqrt{\frac{a^6+b^7}{420}}$ при $a = 2$ и $b$= 1.5 е :

   ○ по-малка или равна на 0.431

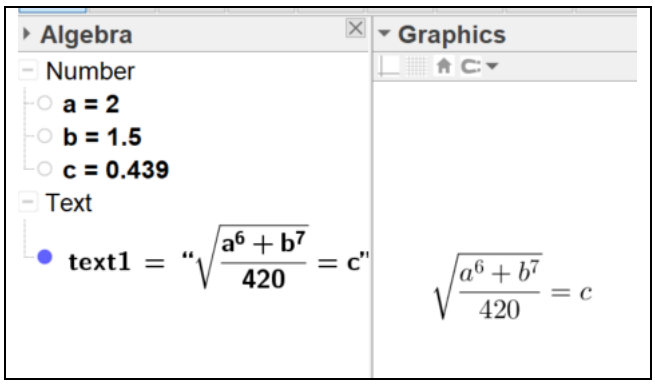
   ◉ по-голяма от 0.431 и по-малка от 0,55

   ○ по-голяма или равна на 0.55.

   Файл: z2k1112.ggb

   Отговор: 0,439

   **Решение.** В помощния файл задаваме стойност 2 на променливата $a$ и стойност 1.5 на променливата b. След изпълнение на командата с клавиша за Нов ред (Enter), ГеоГебра пресмята израза $\sqrt{\frac{a^6+b^7}{420}}$ при $a = 2$ и $b = 1.5$ и записва резултата в алгебричния прозорец като c = 0,439. Същият резултат се изписва и в геометричния прозорец (Фиг. 11.2.1). Вярното твърдение е “по-голяма от 0.431 и по-малка от 0,55”.




Фиг. 11.2.1

3. Кое цяло число е най-близо до числото $\frac{b}{a}$, където $a = 2021^{2020}$ и $b = 2020^{2021}$?

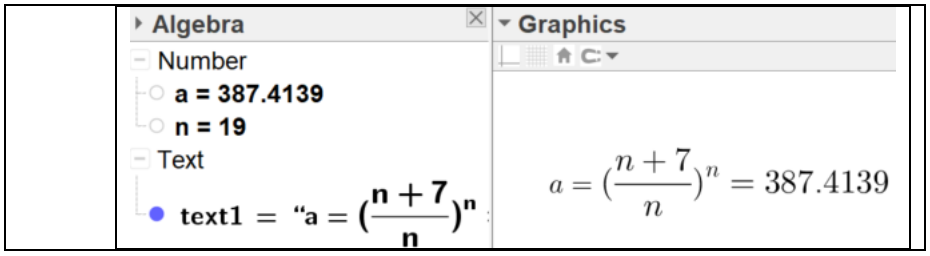
   Файл: z3k1112.ggb

   Отговор: 743

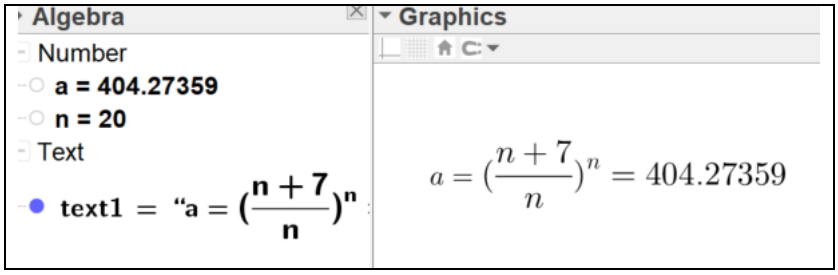
**Решение.** Опитът да се пресметнат поотделно числата $a$ и $b$ с ГеоГебра и след това да се сметне частното $\frac{b}{a}$, не дава резултат. Числата $a$ и $b$ са твърде големи за ГеоГебра. При опит да се пресметне $b = 2020^{2021}$ (с командата 2020^2021) отговорът е или $\infty$ или undefined (неопределено). Затова е добре да се направи пресмятане, което избягва големите числа. Една такава възможност дава представянето $\frac{b}{a} = \left(\frac{2020}{2021}\right)^{2020} 2020$. Изпълнението на командата (2020/2021)^2020 връща отговор 0,36797. Остава да умножим по 2020. Резултатът е 743,30037. Най-близкото цяло число е 703.

4. Намерете и запишете в полето за отговор най-малкото естествено число $n$, за което е в сила неравенството $\left(\frac{n+7}{n}\right)^n > 400$.

   Файл: [z4k1112.ggb]
   Отговор: 20
   **Решение.** В помощния файл могат да се задават различни стойности на $n$. Експериментирайки с различни $n$ виждаме, че при нарастване на $n$ нараства и числото $\left(\frac{n+7}{n}\right)^n$. На Фиг. 11.4.1 и Фиг. 11.4.2 са представени случаите $n = 19$ и $n = 20$, които показват, че отговорът на задачата е $n = 20$.



Фиг. 11.4.1



Фиг. 11.4.2

5. Построен е квадрат, върховете на който са във върхове (възли) на квадратната мрежа. Дължината на страната на едно квадратче от квадратната мрежа е 1 см. Кои от посочените по-долу числа могат да изразяват лицето такъв квадрат?

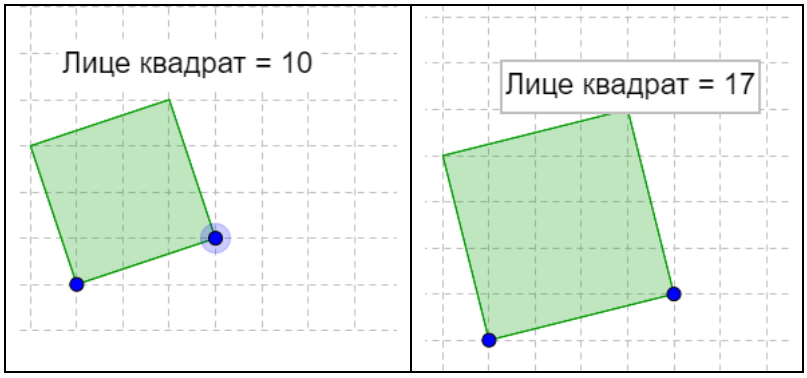
Можете да посочите повече от един отговор

- ☐ 10
- ☐ 17
- ☐ 58
- ☐ 62
- ☐ 233

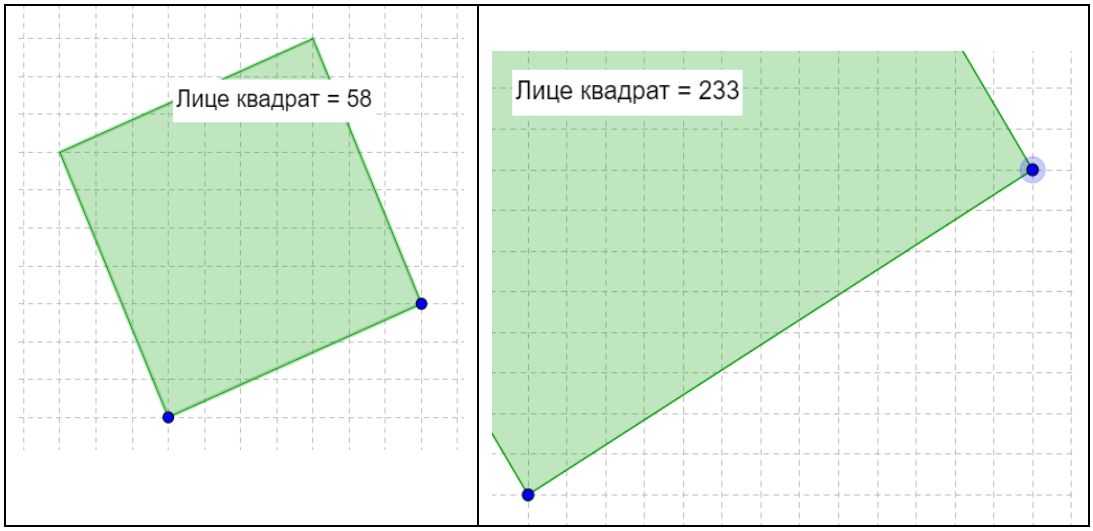
файл z5k1112.ggb
Верните отговори са 10, 17, 58, 233

**Решение.** Провеждаме експерименти с помощния файл, като фиксираме едната синя точка и местим другата по възлите на мрежата. Фиг. 11.5.1 показва, че числата 10 и 17 са правилен отговор на задачата. От Фиг. 11.5.2 личи, че числата 58 и 233 също са правилен отговор на задачата. Следва да очакваме, че 62 не е отговор на задачата. Въпросът е дали и как можем да докажем, че 62 не е отговор на задачата. Една възможност е да фиксираме лявата синя точка в някой възел от мрежата и с център в нея да построим кръг с радиус 8 единици. Ако подвижната синя точка е върху окръжността или извън кръга, лицето на квадрата ще стане по-голямо или равно на 64 > 62. Остава да проверим, че когато десният долен ъгъл на квадрата е вътре в кръга, лицето му пак е различно от 62 (Фиг. 11.5.3). За целта трябва да обходим с дясната синя точка всички възли от квадратната мрежа, които са вътре в кръга и да се убедим, че лицето на зеления квадрат никога не е 62. Макар и трудоемък, този подход дава резултат. Всъщност, можем да

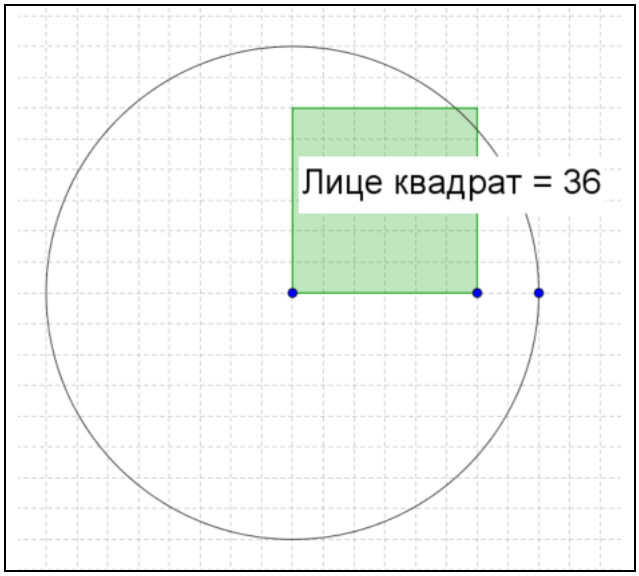
разделим кръга на четири части с една хоризонтална и една вертикална права през центъра му и да обходим с другия  син връх само възлите в една от четвъртинките (например, в горната дясна четвъртинка).




Фиг. 11.5.1




Фиг. 11.5.2



Фиг. 11.5.3

Задачата допуска и математическо решение. Да си мислим, че лявата синя точка е разположена в началото на координатната система, а дясната синя точка е в произволен възел на решетката, разположен в първи квадрант (достатъчно е да разгледаме само тези случаи). Лицето $s$ на всеки такъв зелен квадрат е цяло число, за което съществуват (по теоремата на Питагор) две естествени числа $a$ и $b$, за които е изпълнено равенството $a^2 + b^2 = s$. Числата $a$ и $b$ са координатите на подвижния син връх на квадрата. Ако $s$ е четно число, не е трудно да съобразим, че $a$ и $b$ имат еднаква четност – или и двете са четни, или и двете са нечетни. Ако двете са четни, числото $s$ ще се дели на 4. Ако двете са нечетни ще са изпълнени равенствата

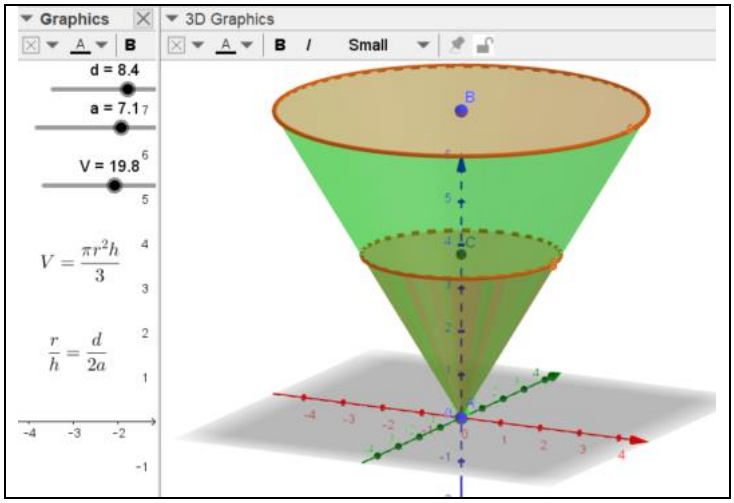
$$(2m+1)^2 + (2n+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4n + 1 = s.$$

Това може да се запище още така:

$$4\big(m(m+1) + n(n+1)\big) = s - 2.$$

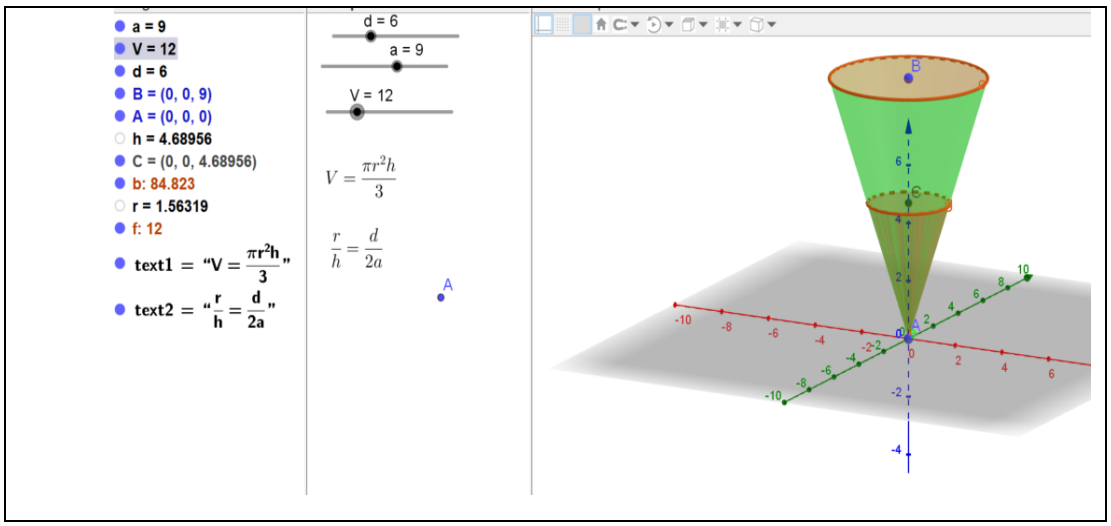
Като вземем предвид, че произведението на две последователни цели числа се дели на 2, виждаме, че $s - 2$ трябва да се дели на 8. Ако $s = 62$, то $s$ не се дели на 4, нито пък $s - 2 = 60$ се дели на 8. Значи, 62 не е решение на задачата. По сходен начин могат да се анализират и останалите случаи в задачата.

6. В съд с форма на конус с диаметър d = 6 дм и височина a = 9 дм има 12 литра вода. Доляли в съда още вода така, че височината на водния слой се увеличила с 16 cm. Колко литра вода са доляли?



Запишете отговора с точност до десети от литъра.
Файл: z6k1112.ggb
Отговор : 16,9

**Решение.** В помощния файл е дадена възможност чрез плъзгачите да се нагласят данните на задачата (Фиг. 11.6.1):

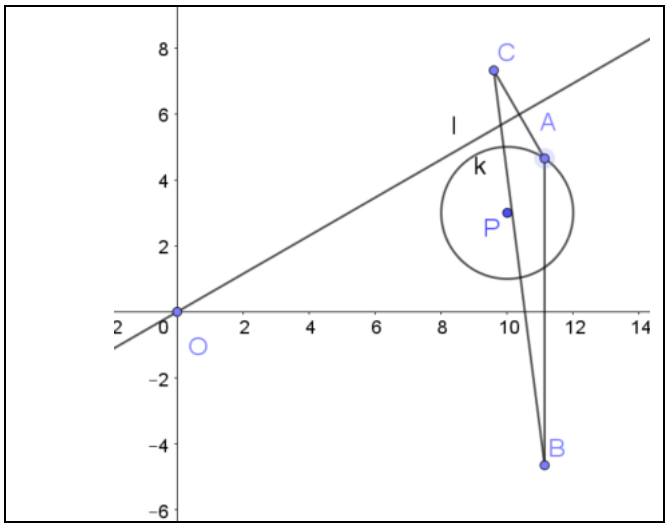



Фиг. 11.6.1

Налятата в съда течност образува конус с радиус $r$ и височина $h$, Този „течен конус“ е подобен на изходния конус, който има радиус $\frac{d}{2} = 3$ дм и височина $a = 9$ дм. Затова, за радиуса $r$ и височината $h$ на конуса с течност винаги е изпълнено съотношението $\frac{r}{h} = \frac{d}{2a} = \frac{1}{3}$. Формулата за обема на конуса с течност придобива в този случай следния вид: $V = \frac{\pi h r^2}{3} = \frac{\pi h^3}{27}$. При положение, че данните са в дециметри, обемът $V$ е в кубически дециметри, т.е. в литри. За височината на конуса с течност получаваме $h = \sqrt[3]{\frac{27V}{\pi}}$ дециметра и тази формула е в основата на помощния файл. От Фиг. 11.6.1 личи, че при обем $V = 12$ литра на конуса с течност, неговата височина е $h$ = 4,68956 дм. След доливане на още течност височината на течността се увеличава с 16 cm или, все едно, с 1.6 дм. Така, след доливането, височината на „течния конус“ става $h$ = 4,68956 + 1.6 = 6,28956 дм, а обемът му се определя по формулата $V = \frac{\pi h r^2}{3} = \frac{\pi h^3}{27} \approx 28.9$ литра

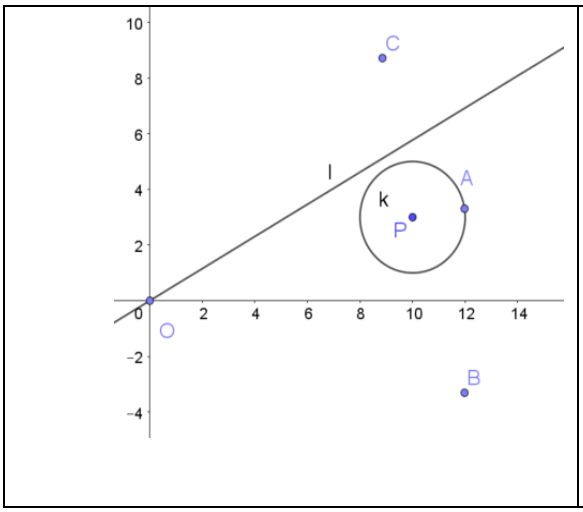
(с точност до десетите). Следователно, добавената течност е 16,9 литра.

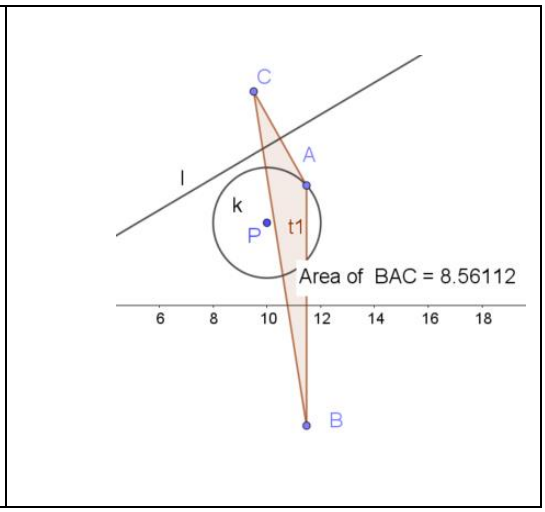
7. Правата $l$ минава през началото O(0, 0) на координатната система, лежи в първи и трети квадрант и сключва ъгъл 30° с абсцисната ос. Точка A е от окръжност $k$ с център в точка P(10, 3) и радиус 2. Точка B е симетрична на A относно абсцисната ос, а точка C е симетрична на A относно правата $l$ . Какво е възможно най-малкото лице на триъгълника ABC?
Запишете отговора с точност до стотните.




Файл: [z7k1112.ggb]
Отговор: 1,89

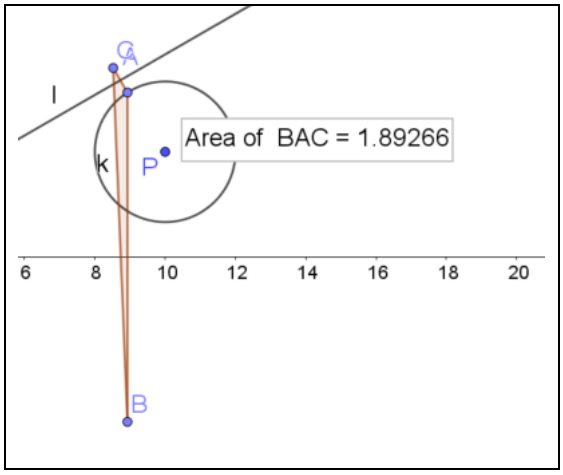
**Решение.** Първоначалният изглед на помощния файл е представен на Фиг. 11.7.1. Активираме бутона и „обхождаме с щракване с левия клавиш“ точките B, A, C и отново точка B. В резултат на това действие на екрана се пояеява бледо-кафяво оцветен триъгълник BAC (Фиг. 11.7.2). Надписът Area of BAC = 8,56112 показва лицето на триъгълника BAC. Този надпис се извежда на екрана след активиране на бутона за лице и щракване върху бледо-кафявия триъгълник.




Фиг. 11.7.1 Фиг. 11.7.2

След това активираме бутона за движение и започваме да местим точка A по окръжността k , като следим промяната на лицето на триъгълника BAC и се стремим да направим това лице възможно най-малко. Резултатът е показан на Фиг. 11.7.3




Фиг. 11.7.3

След закръгляне до стотните получава 1,89.

8. Всяко решение $(x, y)$ на системата

$$x^2 - 6x + y + 1 = 0$$
$$y^2 - 6y + x = p,$$

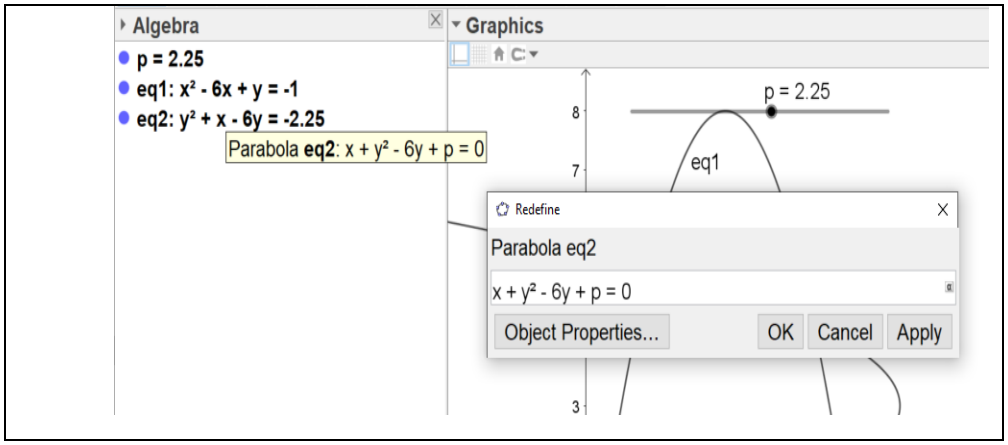
където $p$ е реален параметър, може да се разглежда като точка в равнината, имаща за координати съответно числата $x$ и $y$. Намерете неотрицателна стойност на параметъра ***p,*** за която системата има точно три решения. Т.е. има точно три точки в

равнината, чиито координати са решение на системата. Пресметнете лицето на триъгълника с върхове в тези три точки.
Запишете с точност до стотните.

Файл: [z8k1112.ggb]

Отговор: 31,57

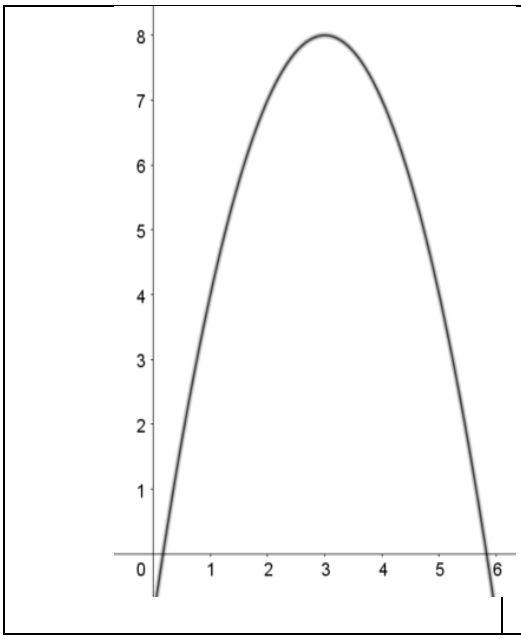
**Решение.** Най-напред следва да установим, дали помощният файл, който в този случай е съвсем прост, отговаря на условието на задачата. В алгебричния прозорец виждаме, че първото уравнение (с име eq1) съответства точно на първото уравнение от условието на задачата. Едно по-продължително задържане на показалеца върху второто уравнение (с име eq2) извежда на екрана малко жълто прозорче (Фиг. 11.8.1), в което е изписано уравнението $x + y^2 - 6y + p = 0$ . То се отличава от второто уравнение в условието на задачата, което е $x + y^2 - 6y = p$. В помощния файл трябва да заменим знака + пред параметъра $p$ със знака - и да продължим решението на задачата. Това може да стане с двукратно щракване върху второто уравнение. Отваря се прозорец (Фиг. 11.8.2), който позволява да се правят промени. След щракване върху квадратчето ОК, ГеоГебра възприема промяната и помощният файл вече съответства на задачата.

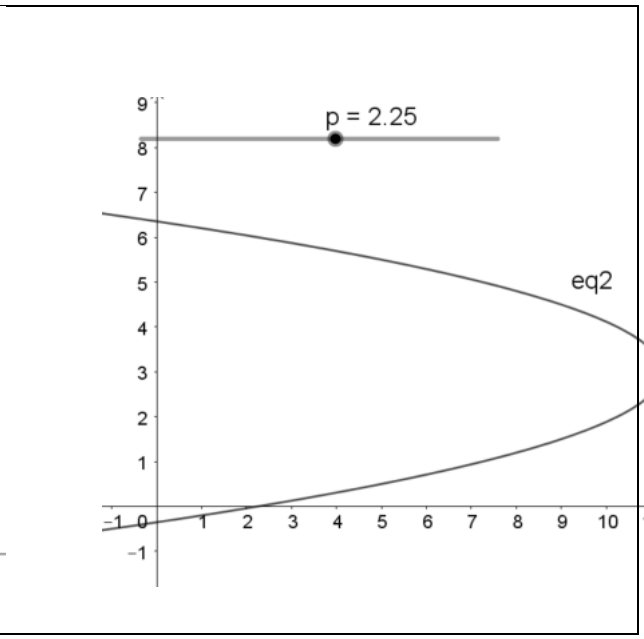



Фиг. 11.8.1

Фиг. 11.8.2

Множеството от точки M(x,y), чиито координати $(x, y)$ удовлетворяват уравнението $x^2 - 6x + y + 1 = 0$ е параболата, нарисувана на Фиг. 11.8.3. За уравнението $y^2 - 6y\ + x = p$, при $p = 2{,}25$ , съответното множество е „хоризонтална“ парабола, част от която е изобразена на Фиг. 11.8.4.



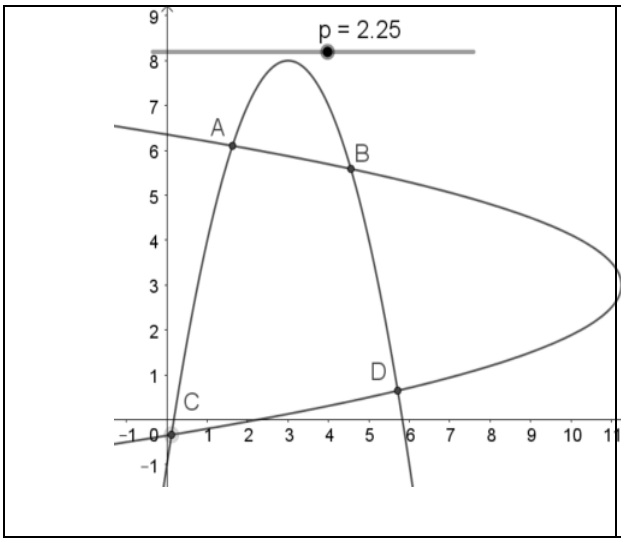



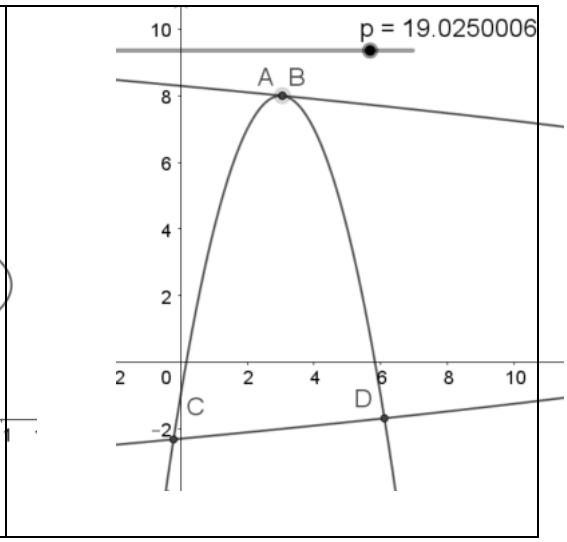

Фиг. 11.8.3 Фиг. 11.8.4

Общата част (сечението) на двете множества се състои от решенията на системата. Тя е изобразена на Фиг. 11.8.5. Състои се от четири точки A, B, D и C. Координатите на всяка от тези точки удовлетворяват, при $p = 2{,}25$, системата уравнения

$$x^2 - 6x + y + 1 = 0$$
$$y^2 - 6y\ + x = \ p.$$

Когато параметърът $p$ нараства, хоризонталната парабола се движи надясно, оставайки успоредна сама на себе си. При това движение точките A и B се изместват нагоре и разстоянието между тях се скъсява. Настъпва момент, когато две от решенията на системата – точките A и B - се сливат (Фиг. 11.8.6). Това става при стойност на параметъра $p = 19{,}025006$. Това е случаят, когато системата има

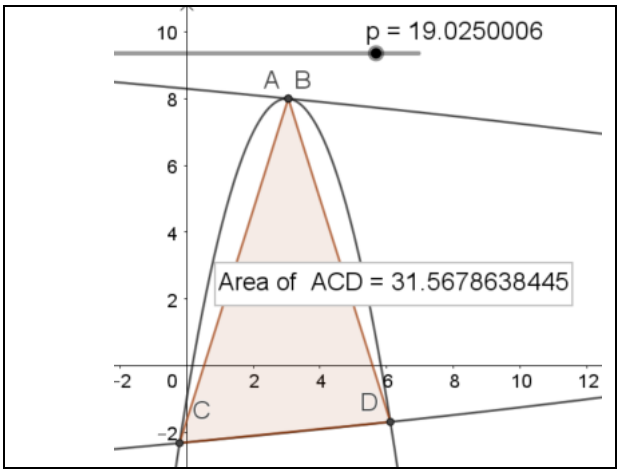



Фиг. 11.8.5 Фиг. 11.8.6

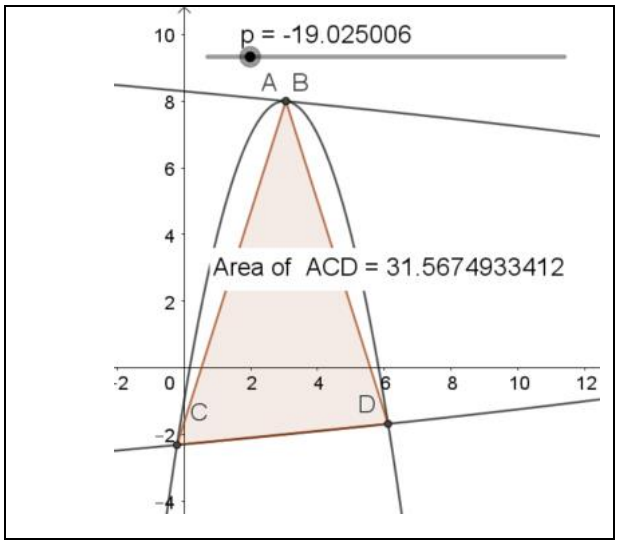
точно три решения.При по-нататъшно нарастване на параметъра $p$ системата ще има само две решения (точките C и D). Остава да измерим лицето на триъгълника с върхове в A=B, C и D, когато

$p = 19{,}025006$. Това става с използване на бутона за лице на многоъгълник. На Фиг. 11.8.7 се вижда, че лицето на триъгълника е 31,5678638445. С точност до стотните, отговорът е 31,57.




Фиг. 11.8.7

**Забележка.** Задачата може да се реши и без да изменяме помощния файл. Достатъчно е да боравим с отрицателни стойности на параметъра $p$ . Ето как би изглеждало решението в този случай (Фиг. 11.8.8)




Фиг. 11.8.8

9. Ролка кухненска хартия има диаметър 20 cm. Диаметърът на картонения цилиндър, на който е намотана хартията е 6 cm. На опаковката е написано, че общата дължина на хартията в ролката е 82,69 метра. Колко слоя хартия има в ролката?

Файл: z9k1112.ggb

Отговор: 203

**Решение.** В помощния файл са дадени следните означения, които са, едновременно с това и упътвания:

w – дебелина в cm на един слой хартия

R = 10 cm – външен радиус на ролката

r = 3 cm – вътрешен радиус на ролката

L = 8270 cm – дължина на хартията

n – брой слоеве хартия в ролката

nw = R – r

L = 2π(r + (r + w) + … + (r + (i -1)w) + … + (r + (n – 1)w)).

Идеята е, че първата (най-вътрешна) намотка на ролката има дължина 2πr. Следващата намотка ще има дължина 2π(r + w), защото радиусът ѝ е вече (r + w). Дължината на n-тата намотка е

2π(r + (n – 1)w). Сумата от дължините на всички намотки е L – дължината на хартията. Като вземем предвид формулите за сума на аритметична прогресия и ненуждаещата се от обяснение формула nw = R – r получаваме последователно:

$$L = 2\pi\left(nr + \frac{(n-1)nw}{2}\right) = 2\pi\left(nr + \frac{(n-1)(R-r)}{2}\right) =$$

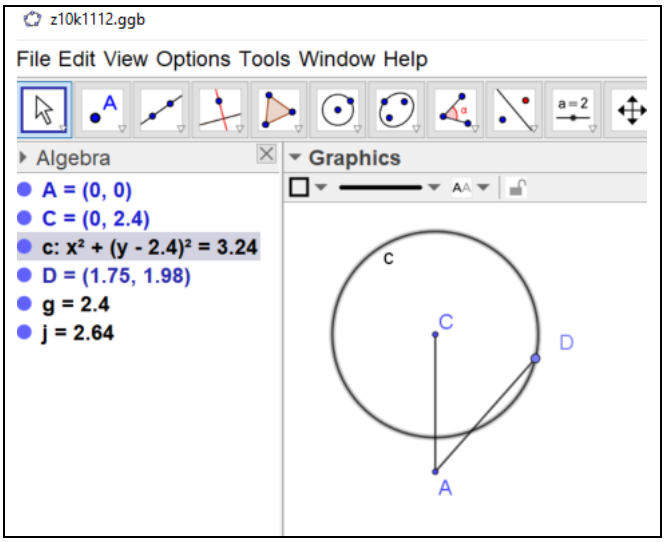
$$= \pi(n(R+r) - (R-r)).$$

Следователно, $n = \frac{\frac{L}{\pi}+(R-r)}{R+r}$. В нашия случай тази фомула приема вида $n = \frac{\frac{8269}{\pi}+7}{13} \approx 203{,}008$ . Можем да смятаме, че в ролката има 203 слоя хартия.

10. За триъгълника ABC е известно, че BC= 3,6 cm, AC= 2,4 cm. Освен това е известно, че ъгълът α между страната AB и медианата AD от върха A към страната BC е 30 градуса. Запишете в сантиметри, с точност до стотните, дължината на отсечката AB.
Файл: z10k1112.ggb

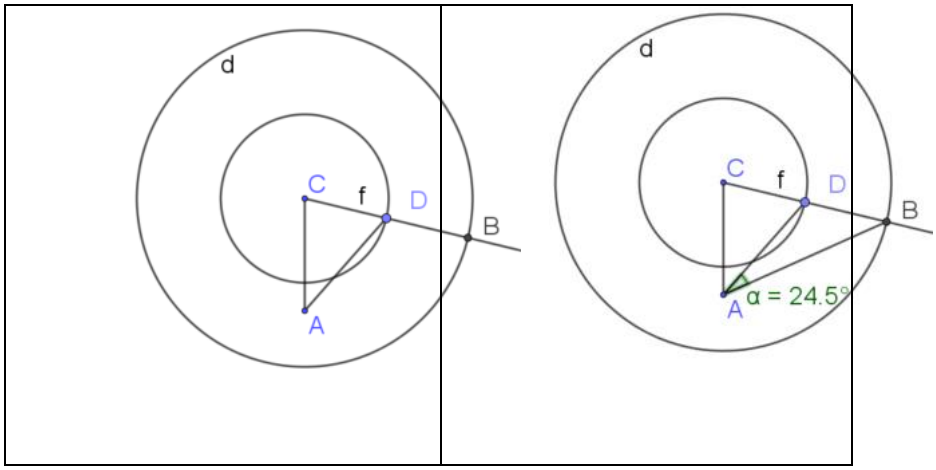
Отговор: 3,38

**Решение.** За решаване на задачата можем да си послужим с помощен файл z10k1112.ggb. Един изглед от него е представен на Фиг. 11.10.1 . В него точка D е от окръжност с център в точка C и радиус 1,8 (половината на дължината на CB = 3,6). Тази окръжност е означена с буквата **c**. Построяваме точка B така, че; C, D и B да са на една линия,




Фиг. 11.10.1

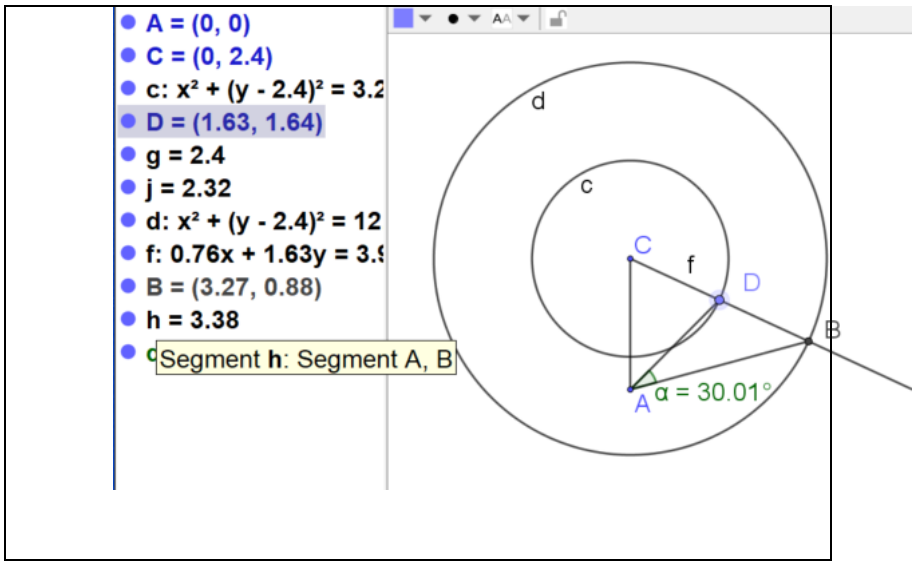
отсечката CD да е равна на отсечката DB и точка D да е между C и B (Фиг. 11.10.2). Един начин да построим точка B е да начертаем окръжност d с център в C и радиус 3,6 (Фиг. 11.10.3) и да намерим пресечната точка B на тази окръжност с лъч f , изхождащ от точка C и минаващ през D.




Фиг. 11.10.2 Фиг. 11.10.3

Това може да стане с помощта на бутоните , и . След това с бутона прекарваме отсечката AB и, накрая, с бутона измерваме ъгъл BAD. Резултатът е показан на Фиг. 11.10.3. При включен бутон за движение можем да местим точка D по окръжността **c** и да намерим такова нейно положение, при което ъгъл BAD да стане приблизително равен на 30°. Това е постигнато на Фиг. 11.10.4. В алгебричния прозорец се вижда, че отсечката AB има дължина h = 3,38.

Записваме това число 3,38, като отговор на задачата.


A = (0, 0)
C = (0, 2.4)
c: x² + (y - 2.4)² = 3.2
D = (1.63, 1.64)
g = 2.4
j = 2.32
d: x² + (y - 2.4)² = 12
f: 0.76x + 1.63y = 3.9
B = (3.27, 0.88)
h = 3.38
Segment h: Segment A, B
d
c
C
f
D
B
A
α = 30.01°

Фиг. 11.10.4