Решения на задачите от състезанието

Viva Математика с компютър

Проведено на 25 Април 2020 г. (Четвърта група - 9 и 10 клас)

http://course.cabinet.bg/index.php?contenttype=publicview&testidselectedbyuser=202

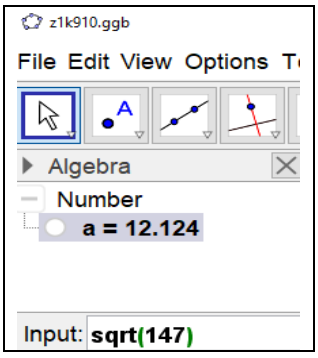
Задача 1

Изчислете $\sqrt{147}$.

http://course.cabinet.bg/content/202/ggb/z1k910.ggb

Верен отговор 12.12 (3 т.)

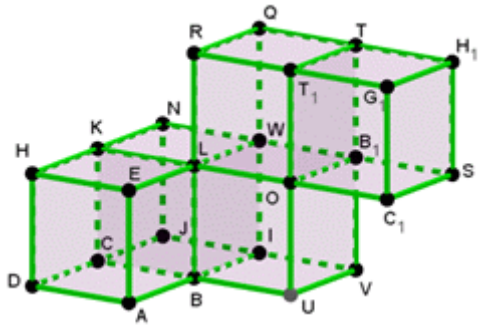
Решение. Отдолу, под алгебричния прозорец на помощния файл , след думата Input, има поле за нанасяне на команди, което ще наричаме Команден ред. Записваме в този команден ред командата sqrt() за намиране на квадратен корен от числото, записано между скобите. В нашия случай командата изглежда така: sqrt(147) . Изпълняваме командата, като натиснем клавиша за „Нов ред“ (Enter). Резултатът от изпълнението на командата се записва в алгебричния прозорец и се вижда на Фиг. 1.1. Като отговор следва да запишем числото 12,12.



Фиг. 1.1

Задача 2

Намерете градусната мярка на ъгъл DSR.



Запишете с точност до десетите.

http://course.cabinet.bg/content/202/ggb/z2k910.ggb

Верен отговор 40.2 (3 т.)

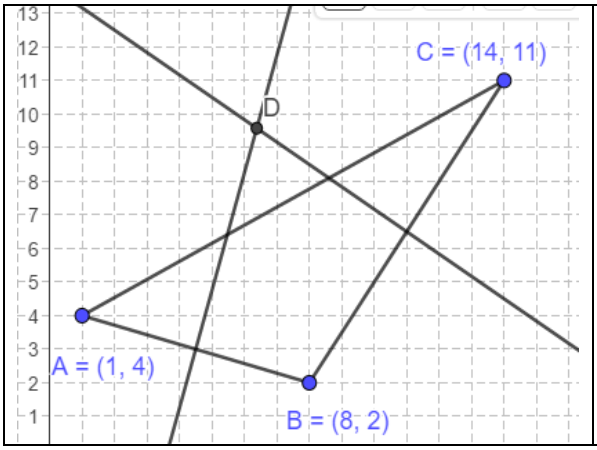
Решение. В предоставения файл активираме бутона  за измерване на ъгли и щракваме последователно върху точките D, S и R от фигурата. До точка S се появява мярката на ъгъла: 40.2°. Като отговор записваме 40.2.

Задача 3

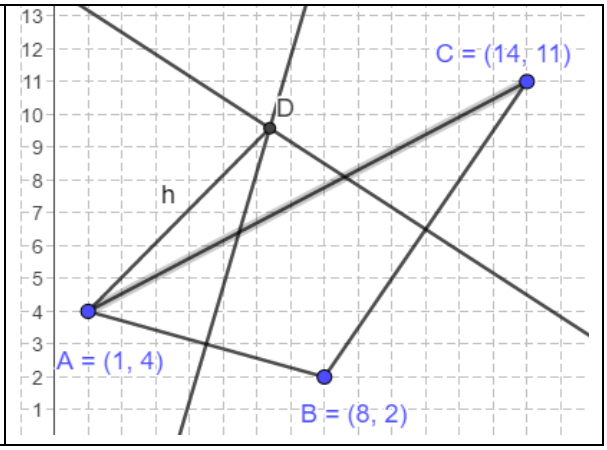
Намерете радиуса на описаната около триъгълника ABC окръжност, ако A(1; 4), B(8, 2), C(14, 11). Запишете с точност до десетите.
http://course.cabinet.bg/content/202/ggb/z3k910.ggb

Верен отговор 7.8 (3 т.)

Решение. Известно е, че центърът на окръжност лежи на симетралата на всяка хорда. Построяваме с помощта на бутона  симетрали към отсечките AB и BC (Фиг. 3.1). С бутона  намираме пресечната точка D на двете симетрали. Тази точка е център на окръжността, минаваща през трите дадени точки.



Фиг. 3. 1



Фиг. 3. 2

Остава да измерим разстоянието от центъра D до някой от върховете на триъгълника (например до точка A). Това става с активиране на бутона  и щракване върху A и D. ГеоГебра очертава отсечката h = DA в геометричния прозорец (Фиг. 3.2.) и записва в алгебричния прозорец дължината на тази отсечка: h = 7.8. Това число 7.8 следва да се запише като отговор на тази задача.

Задача 4

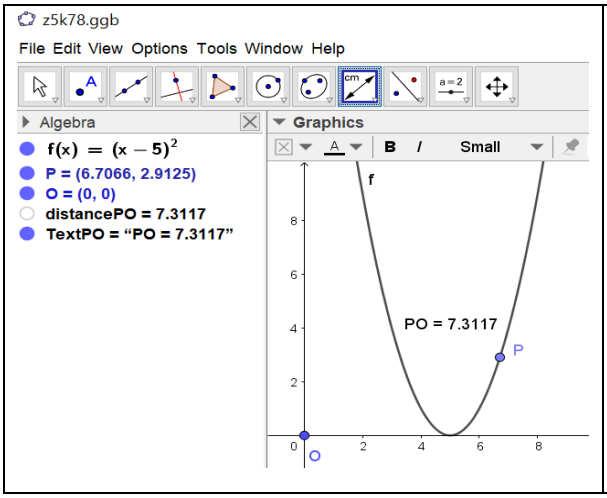
Точка P е от графиката на функцията $y = (x - 5)^2$. Колко е минималното разстояние от точка P до началото O(0,0) на координатната система?

Запишете отговора с точност до хилядни

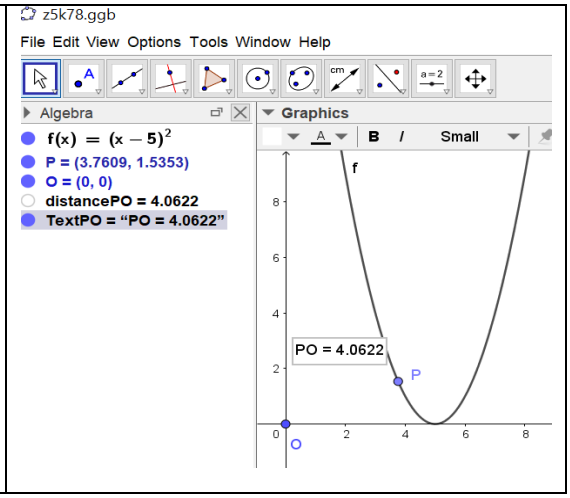
http://course.cabinet.bg/content/202/ggb/z4k910.ggb

Верен отговор 4.062 (5 т.)

Решение. В помощния файл активираме бутона  за измерване на разстояние и щракваме последователно върху точките O и P. На екрана се появява разстоянието между точките P и O. В случая на Фиг. 4. 1 то е PO = 7,3117. Активираме бутона  и започваме да „влачим“



Фиг. 4. 1

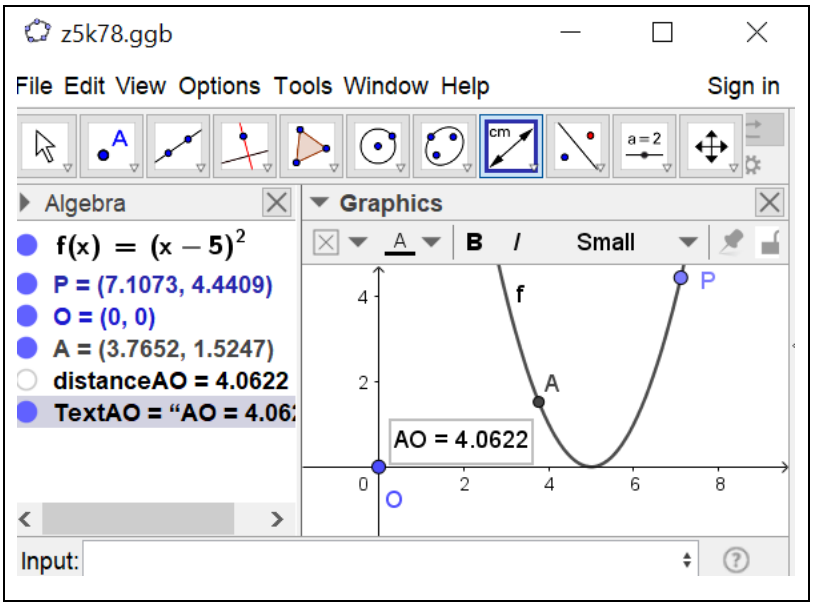


Фиг. 4. 2

точката P по графиката на функцията $y = (x - 5)^2$. Разстоянието от точка O до точка P се мени. Така можем „на ръка“ да намерим, кога точка P ще е най-близо до точка O. За по-голяма точност при ръчното намиране на търсеното положение за точката P, можем да направим раздуване на картината (Zoom) в помощния файл. На Фиг. 4. 2 е изобразен резултатът от такова ръчно търсене на решението: PO = 4,0622. Като отговор можем да запишем 4,062.

ГеоГебра разполага със специална команда Minimize(<Dependent number>, <Point on Path>) за намиране на минимална стойност на величина (като, например, разстоянието PO), която се променя, когато дадена точка (например P) се движи по определена крива линия. В нашия случай командата изглежда така: Minimize(PO, P). Изпълнението ѝ изкарва на екрана търсеното положение на точка P. На Фиг. 4.3 това е точката A. В алгебричния прозорец са записани и координатите на тази точка:

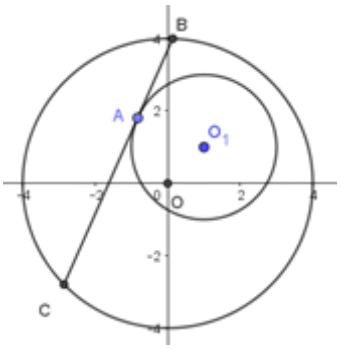
A(3.7652, 1.5247). С бутона  е измерено и разстоянието от A до O. То отново е 4.0622. Като отговор следва да запишем 4.062.



Фиг. 4. 3

Задача 5

Дадени са две окръжности k и k_1. Окръжността k е с център в т. O(0,0) и има радиус 4 cm. Окръжността k_1 е с център в т. $O_1(1,1)$ и има радиус 2 cm. Точка A е от окръжността k_1. Допирателната към k_1 в точка A пресича окръжността k в точките B и C. Каква е максималната възможна дължина на отсечката BC?



Запишете в cm с точност до стотните.

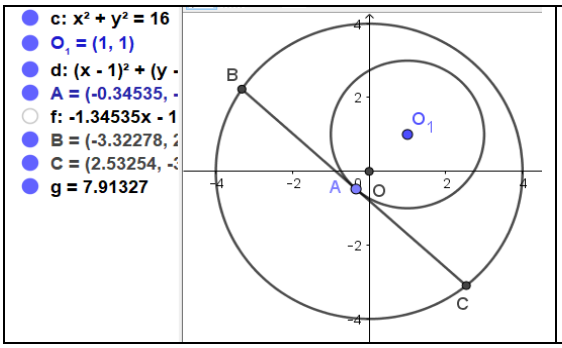
http://course.cabinet.bg/content/202/ggb/z5k910.ggb

Верен отговор 7.91 (5 т.)

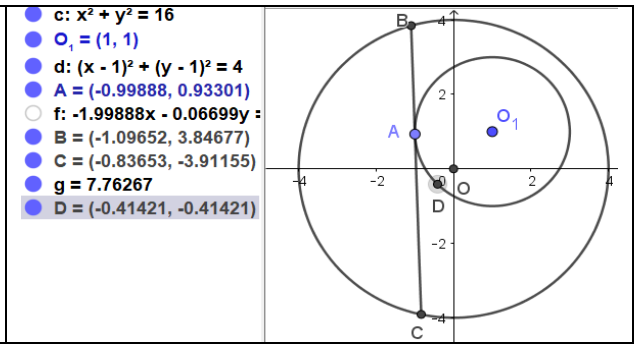
Решение. В алгебричния прозорец на помощния файл отсечката BC е получила име g , с което едновременно се означава и дължината на тази отсечка. С „ръчно“ местене на точката A по k_1, като в същото време следим и промяната на числото g , можем приблизително да намерим положение на точката A, при което отсечката BC е най-дълга (и, съответно, числото g е най-голямо). Резултатът може да се види на Фиг. 5. 1: g = 7.91327. Можем да запишем като отговор числото 7,91.

За по-голяма точност можем да използваме специалната команда Maximize(<Dependent number>, <Point on Path>) за намиране на максимална стойност на величина (например g), която се променя, когато дадена точка (например A) се движи по определена крива линия

(например k_1). В нашия случай командата изглежда така: Maximize(g, A). Изпълнението ѝ изкарва на екрана точка D , която е търсеното положение на точка A (Fig. 5. 2). Ако „закараме“

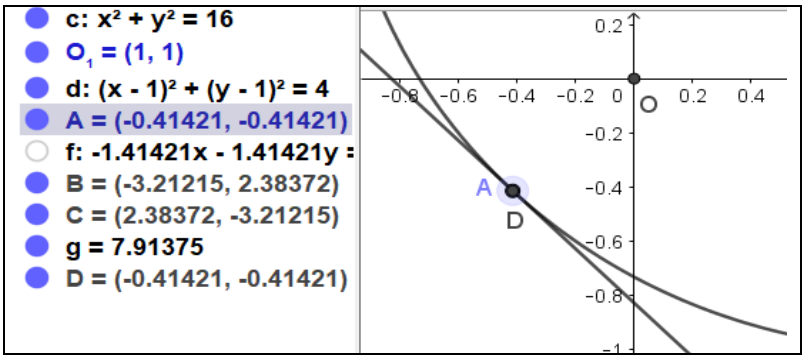


Фиг. 5. 1



Фиг. 5. 2

С влачене точка A до съвпадане с D, ще получим най-дълга отсечка BC. За удобство и по-прецизна работа, при влачението е добре да раздуем (направим Zoom на) картината. Резултатът е показан на Фиг. 5. 3. Координатите на точка A съвпадат с координатите на точка D. Дължината на BC в този случай е g = 7,91375. Отново стигаме до същия отговор 7,91.



Фиг. 5. 3

Задача 6

При кликване върху малко квадратче то променя цветността си, т.е., бялото става черно, а черното – бяло. След кликване върху едно квадратче Михаела установила, че получената композиция има ос на симетрия, но няма център на симетрия. Върху кое от посочените квадратчета може да е кликнала Михаела?

Можете да посочите повече от един отговор.

☐ А1 < верен отговор

☐ А5

☐ В3

☐ Д1

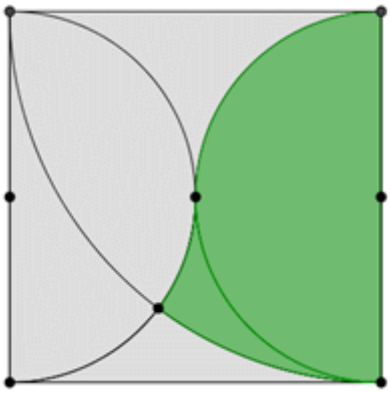
☐ Д5 < верен отговор

http://course.cabinet.bg/content/202/ggb/z6k910.ggb

Решение. Особеността на тази задача до голяма степен е скрита във формулировката ѝ. Човек може да очаква, че следва да се изпробват със щракване всичките 5 х 5 = 25 квадратчета. Всъщност в условието на задачата е казано „Върху кое от посочените квадратчета…..“ А „посочените квадратчета“ са само 5 и са изброени: А1, А5, В3, Д1 и Д5. Непосредствената проверка показва, че отговорите са два: А1 и Д5.

Задача 7

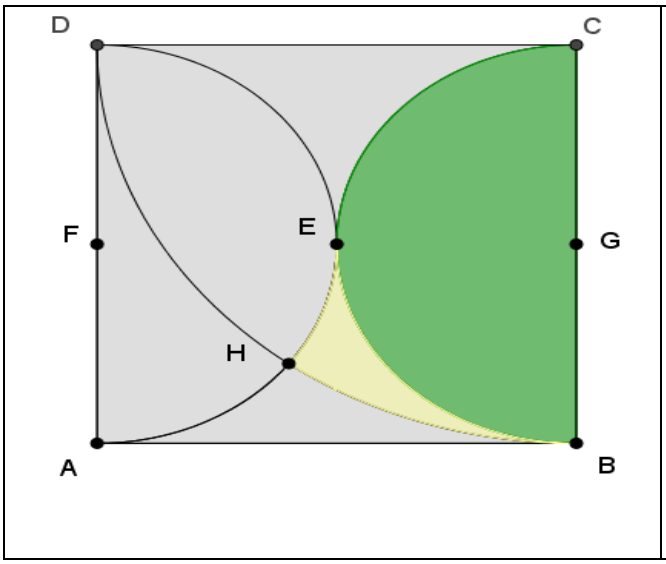
Колко процента от квадрата са оцветени в зелено?



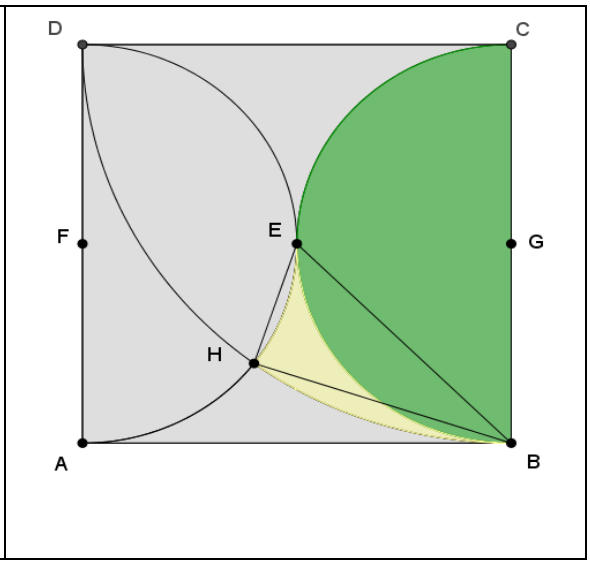
Запишете с точност до десетите.
http://course.cabinet.bg/content/202/ggb/z7k910.ggb

Верен отговор 43.8 (5 т.)

Решение. Както се вижда на Фиг. 7.1, зелената част на квадрата се състои от две части – оцветен в зелено полукръг с център в G и радиус половината от страната ВС и „криволинеен триъгълник“ ВЕН, който сега е оцветен в жълто с цел по-добро открояване. В алгебричния прозорец на помощния файл виждаме координатите на два от върховете на квадрата - А(0,0) и В(7,0). Значи, дължината на страната на квадрата е 7. Съответно, радиусът на зеления полукръг на Фиг. 7.1 е 3.5. Лицето на този полукръг е $\frac{1}{2}\,\pi(3.5)^2 = 5.625\,\pi$. Остава да намерим лицето на жълтия криволинеен триъгълник на Фиг. 7.1 . За целта ще си послужим с лицето на

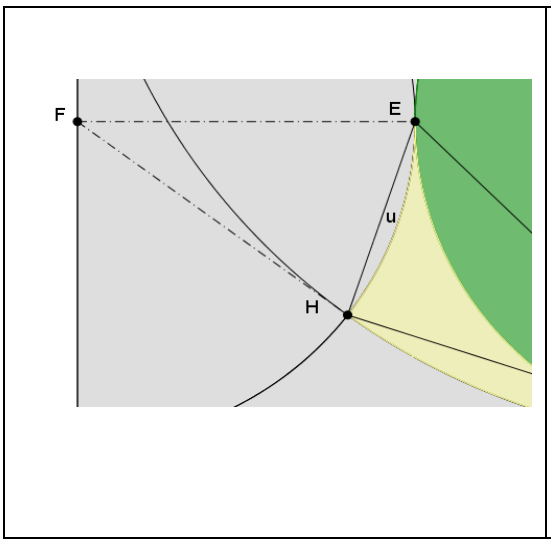


Фиг. 7. 1

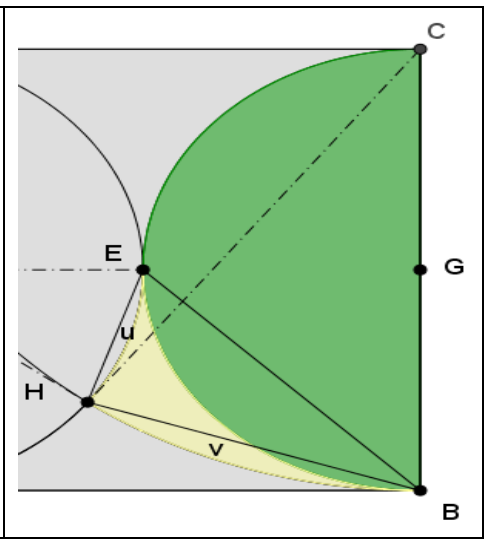


Фиг. 7. 2

обикновения триъгълник BEH (Фиг. 7.2), като към него ще прибавяме или отнемаме „отрези от кръгови сектори“. Например, от лицето на BEH трябва да се извади (Фиг. 7.3) лицето u на частта от кръговия сектор с център в F и дъга HE, която е заградена от дъгата и отсечката HE (както и целия кръгов сектор, тази час е оцветена сиво). Трябва да се добави лицето v (Фиг. 7.4) на частта от кръговия сектор с връх в C и дъга



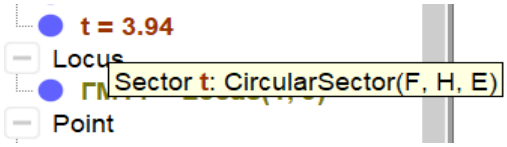
Фиг. 7. 3

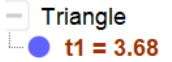


Фиг. 7. 4

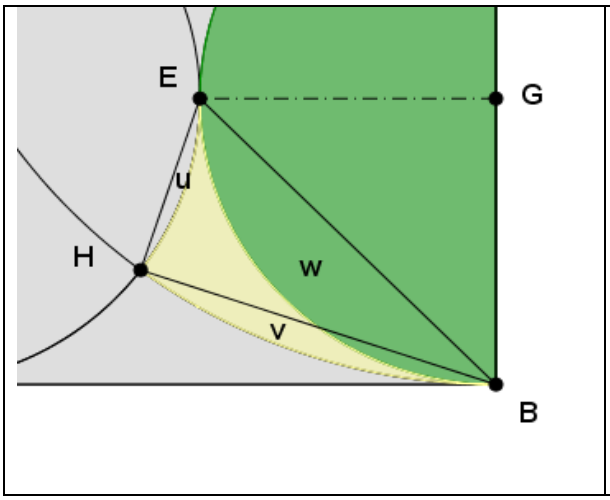
HB, която е заградена от дъгата и от отсечката BH (оцветена е в жълто и отчасти в зелено). Накрая, от резултата трябва да извадим (Фиг. 7. 5) лицето w на частта от кръговия сектор с връх в точка G и дъга EB, която е извън триъгълника GEB (оцветена е в зелено). Намирането на u, v и w. Става по един и същ начин. Например, за намирането на u можем да се послужим с бутона  за построяване на кръгов сектор (или с изпълнение на съответстващата на този бутон команда CircularSector(<Midpoint> , <Point>, <Point>)). При използването на този бутон най-напред се щраква върху „върха“ на сектора (например точка F от Фиг. 7. 6) и след това върху точките от краищата на дъгата (в случая това са точките H и E). Същото може да се постигне и с изпълнение на командата CircularSector(F , H, E). Последователността на щракване върху краищата на дъгата е важна. В нашия случай кръговият сектор е получен чрез последователно

щракване върху точките F , H и E. Правилото е, че дъгата свързва двете крайни точки „в посока обратна на движението на стрелките на часовника“. При всяко построяване на кръгов сектор ГеоГебра автоматично пресмята неговото лице и го вписва в алгебричния прозорец. В нашия случай записът изглежда така:

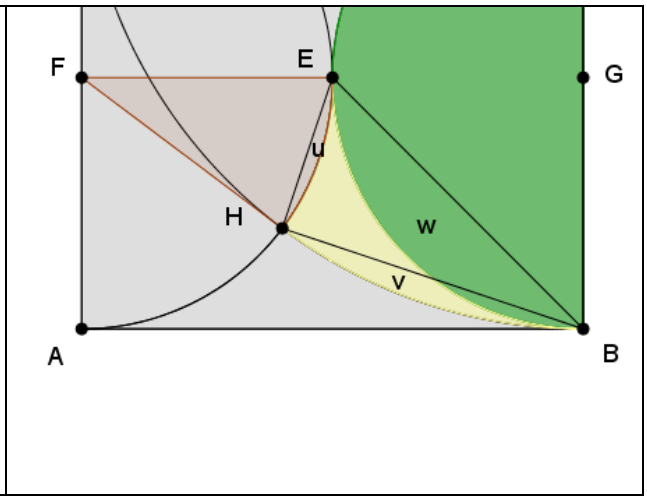


За да получим лицето u трябва да извадим от t = 3.94 лицето t1 на триъгълника FHE, което е намерено с бутона  . Записът в алгебричния прозорец е 

. Сега числото u се



Фиг. 7. 5



Фиг. 7. 6

пресмята с командата u = t – t1. Резултатът е записан като u = 0,27 (при сметките ГеоГебра борави с по-голям брой цифри и извършва закръгляването накрая; по тази причина u = 0,27, а не на 0.26). По същия начин пресмятаме v = c_1 – t2 = 15,77 – 14,7 = 1,07 и w = d_1 –t3 = 9,62 – 6,13 = 3,5. Лицето на триъгълника BEH е 4,9. За интересуващото ни лице на жълтия криволинеен триъгълник получаваме a = 4,9 – u + v – w = 2,2 . Лицето на зеления полукръг с център в G и радиус половината от страната BC също е намерено с бутона за кръгов сектор  и е записано в алгебричния прозорец. То е s = 19,24. Окончателно, за лицето на зелената част от условието на задачата получаваме n = s + a = 21,44. Зелената част от условието на задачата е $o = \frac{n}{49} =$ 0,4377 от целия квадрат. В проценти 43,8 %.

Задача 8

Пръчка с дължина 120 см се използва изцяло след нарязване за изработване на ръбовете на пирамида с равни ръбове. Какъв е най-малкият обем на така получена пирамида?

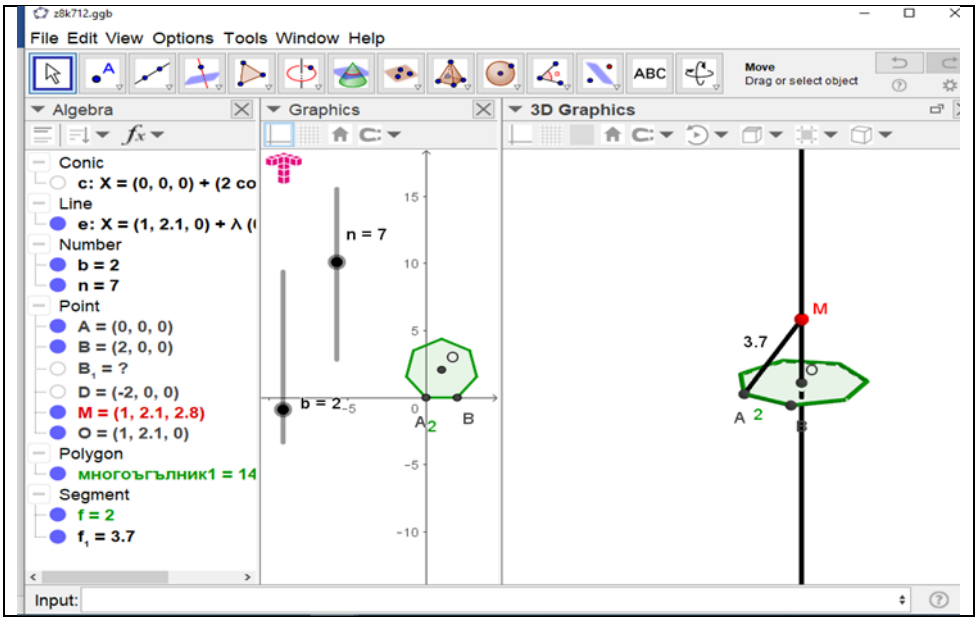
Запишете в $см^3$ с точност до цялата част.

http://course.cabinet.bg/content/202/ggb/z8k910.ggb

Верен отговор 521 (5 т.)

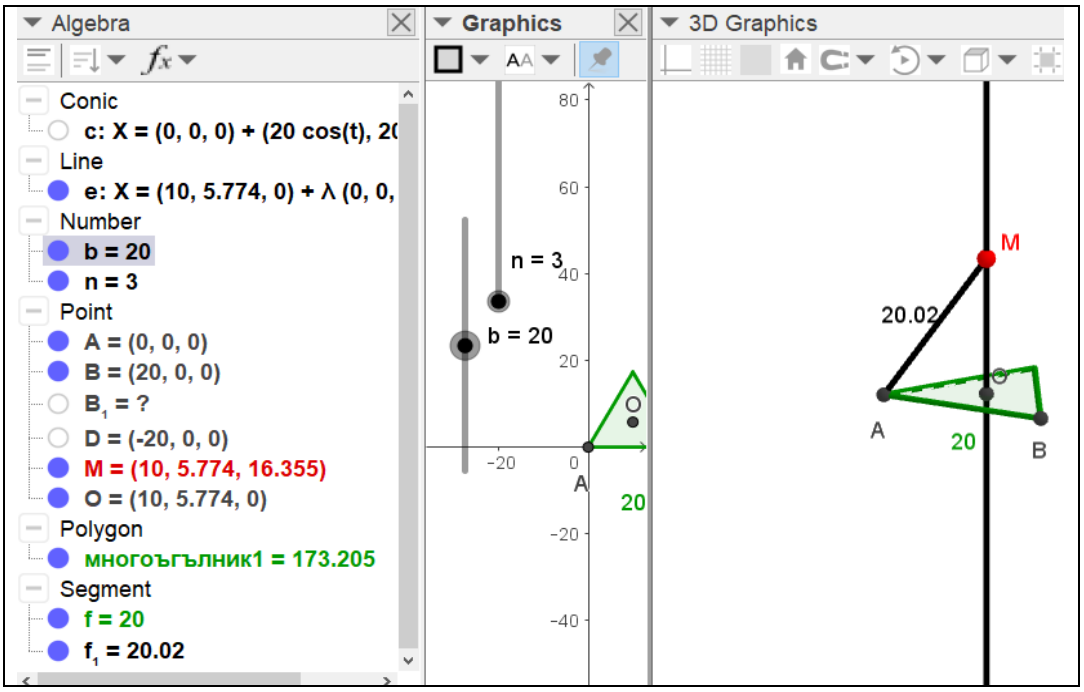
Решение. В помощния файл към тази задача има два плъзгача – за броя на върховете на равностранния многоъгълник в основата на пирамидата и за еднаквата дължина на всички ръбове на пирамидата. Те са разположени в „равнинния“ геометричен прозорец (в средата на

Фиг. 8.1), който често наричаме „двумерен графичен прозорец“ или просто „графичен прозорец“. В същия прозорец е изобразен и многоъгълникът в основата на пирамидата. В „пространствения“ геометричен прозорец, който е най-вдясно и който ще наричаме „тримерен графичен прозорец“ или „прозорец за тримерна графика“, не е изобразена цялата пирамида, а само основата ѝ и един неин околен ръб - AM. Изобразена е и дължината на отсечката AM. Върхът на пирамидата, точка M , може да се движи надолу и нагоре по вертикалната ос.



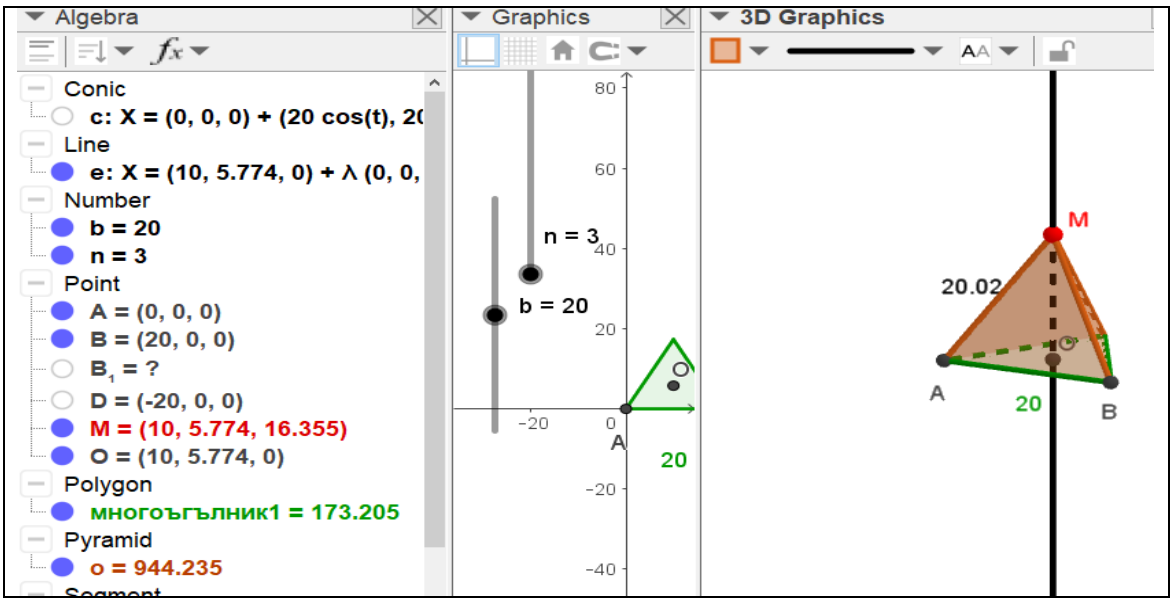
Фиг. 8.1

Чрез местене на точка M можем да търсим такова нейно положение, при което дължината на AM да се изравни с дължината на ръба в основата на пирамидата. В началния вариант на помощния файл плъзгачът за броя на върховете на основата на пирамидата е сложен на 7. Избираме коя да е стойност на другия плъзгач (например 2, както е на Фиг. 8.1) и започваме да движим точка M с цел дължината на AM да стане равна на зададената дължина на ръба. Оказва се, че това е невъзможно. Дължината на AM е винаги по-голяма от дължината на основния ръб. Опитваме с други дължини на ръба. Отново експериментите показват, че няма седмоъгълна пирамида с равни ръбове. По същия начин се убеждаваме, че няма такава осмоъгълна или „повече“-ъгълна пирамида. Опитваме с шестоъгълна пирамида. Резултатът сега е друг. При каквато и да е дължина на основния ръб, единственото място за точка M, при което дължината на AM е равна на дължината на ръба е центърът O на равностранния многоъгълник в основата на пирамидата. В този случай обемът на пирамидата е нула, защото височината ѝ е нула. Остава да разгледаме останалите случаи – триъгълна, четириъгълна и петоъгълна пирамида. Опитите с помощния файл показват, че при всяка дължина на ръба такива 3 – 4 – 5 – ъгълни пирамиди наистина съществуват. Остава да пресметнем обемите на тези пирамиди, когато еднаквите им ръбове са направени от пръчка с обща дължина 120 cm.



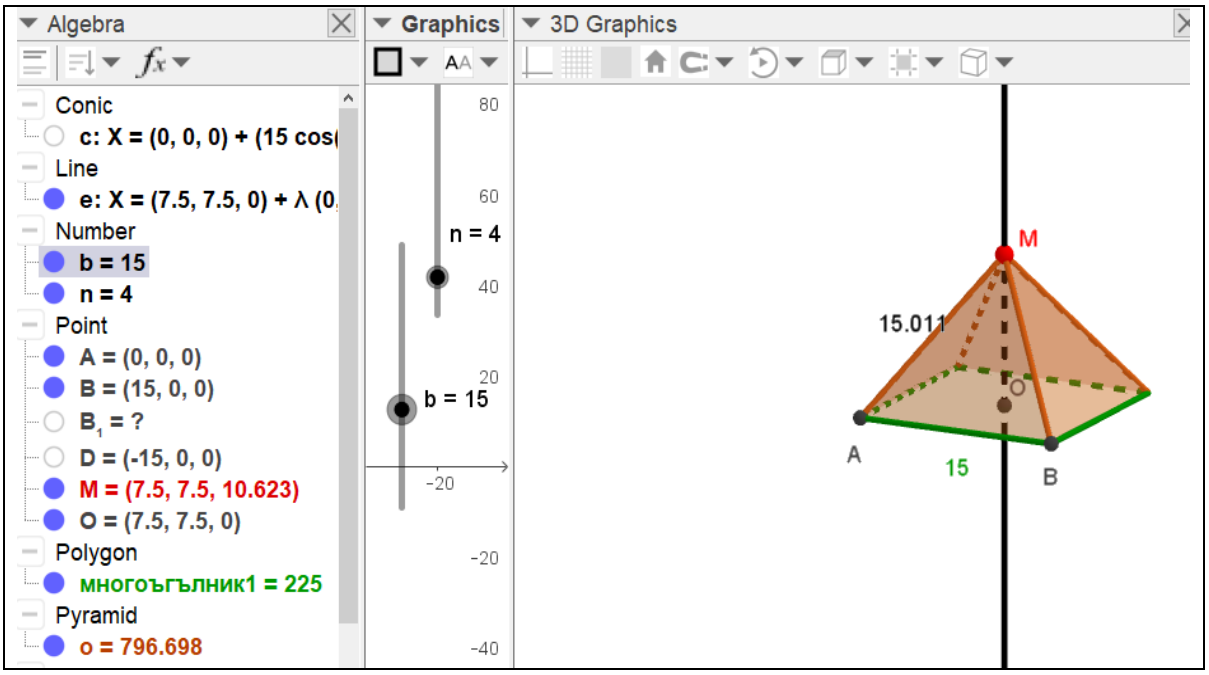
Фиг. 8.2

На Фиг. 8.2 е изобразен случая на триъгълна пирамида с 6 ръба, всеки от които има една и съща дължина - 20 cm . Дължината на основните ръбове се задава с местене на точката по плъзгача за b или като в алгебричния прозорец се щракне двукратно върху b, при което се открива възможност, дължината да се впише чрез клавиатурата. Положението на точката M се избира така, че дължината на AM да е колкото е възможно по-близка до 20 cm. Ще използваме бутоните на ГеоГебра за да онагледим тази пирамида. Едновременно с това ГеоГебра ще изчисли и интересуващия ни обем на пирамидата. След задействане на бутона  за построяване на пирамида, трябва да кажем кой многоъгълник ще служи като основа на пирамидата и коя точка ще е неин връх. За целта, в прозореца за тримерна графика последователно щракваме върху триъгълника и, след това върху точка M . ГеоГебра веднага изобразява пирамидата (Фиг. 8.3), дава ѝ име „o“ в алгебричния прозорец и записва там нейния обем o = 944.235.



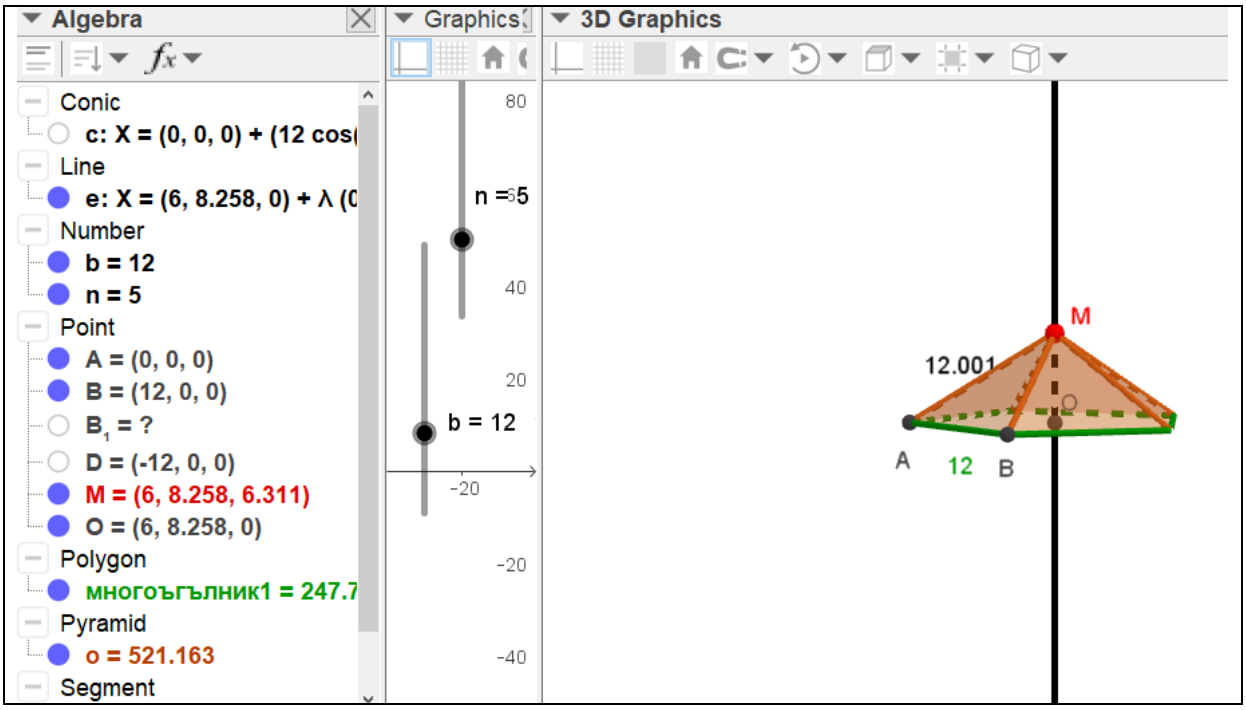
Фиг. 8.3

Правим същото за четириъгълна пирамида. Ръбовете сега са 8 и всеки има дължина 15 cm. Задаваме, съответно, стойност 4 на плъзгача за броя на върховете на основата и стойност 15 на другия плъзгач. Наместваме с влачене точката M така, че отсечката AM да има дължина колкото може по-близка до 15. Получената пирамида е онагледена на Фиг. 8.4 . В алгебричния прозорец е указано, че обемът на пирамидата сега е o = 796,698 кубически сантиметра.



Фиг. 8.4

Извършваме същите действия и за петоъгълна пирамида. Резултатът е показан на Фиг. 8.5.

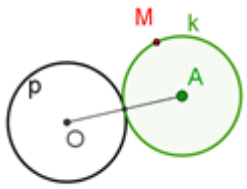


Фиг. 8.5

Обемът сега е o = 521,163. Ясно е, че като отговор на задачата трябва да сложим обема на петоъгълната пирамида, който е най-малък – 521.

Задача 9

Окръжността k(A, r =7,3 cm) с отбелязана точка M върху нея се търкаля върху окръжността p(O, r =7,3 cm) и след една пълна обиколка около нея се връща в изходното положение, очертавайки крива, наречена кардиоида. Намерете дължината на тази кардиоида.

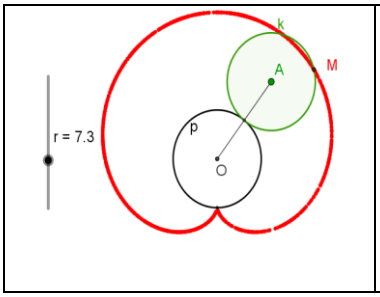


Запишете в cm с точност до десетите

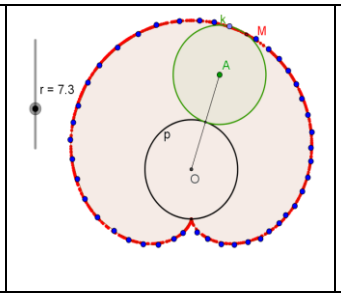
http://course.cabinet.bg/content/202/ggb/z9k910.ggb

Верен отговор 116.8 (8 т.)

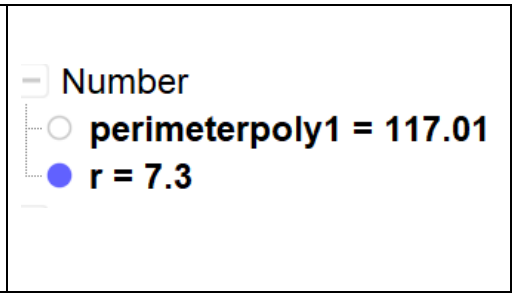
Решение. Отваряме помощния файл и поставяме плъзгача в положение r = 7,3. При задействан бутон  влачим точка A до извършване на пълна обиколка около точка O. Червената точка M оставя, като своя диря, изобразената на Фиг. 9.1 крива, която прилича на сърце и затова е наречена „кардиоида“. В момента не разполагаме с готов инструмент, с чиято помощ да намерим дължината на кардиоидата. Налага се да импровизираме. Една добра идея за приблизително намиране на търсената дължина е да приближим кардиоидата с многоъгълник с много върхове и да измерим периметъра на многоъгълника. При активиран бутон  отбелязваме с щракване последователно точки върху кардиоидата, докато извършим пълна обиколка около нея и щракнем отново върху първата отбелязана точка. Получаваме многоъгълник с много върхове, който е изобразен на Фиг. 9.2 . В алгебричния прозорец на файла този многоъгълник е записан като poly1= 1000,41. Числото 1000,41 е лицето на многоъгълника. На нас ни трябва да намерим периметъра му. Това може да стане, като задействаме бутона  за измерване на дължини на обекти и щракнем върху poly1.



Фиг. 9.1



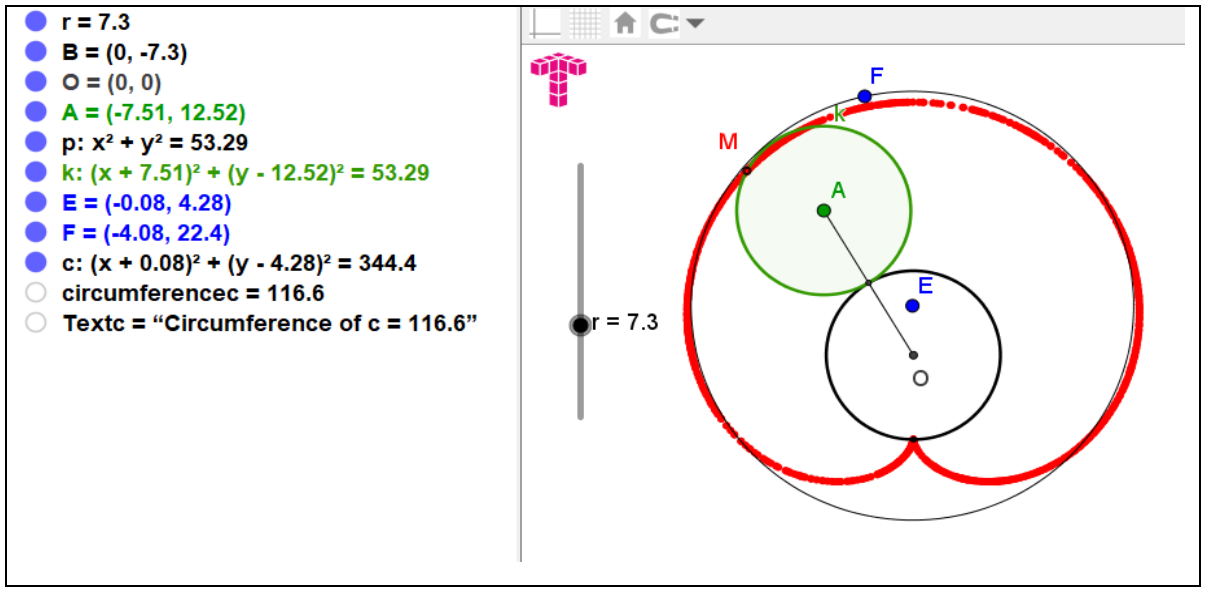
Фиг. 9.2



Фиг. 9.3

В горната част на алгебричния прозорец се появява запис perimeterpoly1 = 117,01 (Фиг. 9.3). Колкото е по-голям броя на върховете на многоъгълника, толкова по-добро е приближението на периметъра на кардиоидата.

Можем да опитаме и друга идея. Да построим окръжност, която относително добре („на око“) приближава периметъра на кардиоидата и да вземем обиколката на тази окръжност като дължина на търсения периметър. Това е реализирано на Фиг. 9.4.



Фиг. 9.4

Приближаващата окръжност е записана в алгебричния прозорец с името c. Периметърът ѝ е записан като circumferencec = 116,6. Виждаме, че двата резултата (117,01 и 116,6) са близки. Можем да запишем като отговор някое междинно число, например – средно - аритметичното на двете числа - 116,8.

Все пак е редно да отбележим, че в намирането на този отговор има голям произвол, предизвикан от това, че работим с приближения. Двете намерени числа се отличават с 0,41 cm, а в условието на задачата се иска точност до десетите от сантиметъра. В такива случаи е полезно да потърсим информация за кардиоидата, която ще ни даде по-точен отговор. Запитване в Google с думата „кардиоида“ на първо място предлага като отговор информацията в Уикипедия: https://bg.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%B0%D1%80%D0%B4%D0%B8%D0%BE%D0%B8%D0%B4%D0%B0

Там е казано, че дължината на кардиоидата е 8a, където **a** е радиусът на кръга. В нашия случай това означава, че дължината на кардиоидата би трябвало да е 58.4 cm! Виждаме, че нещо не е в ред. Не е за вярване, че сме допуснали толкова голяма грешка. Продължаваме търсенето на информация. Друг сайт (https://www.matematika.bg/geometry/analitichna-geometria/geometry4/specialni-krivi-ot-analitichnata-geometria.html) също твърди, че дължината на кардиоидата е 8a, но тук числото **a** не е радиус, а е диаметър на кръга. Проверката на други места (например на адрес https://ru.qwe.wiki/wiki/Cardioid) също показва, че вярната стойност на периметъра на кардиоидата е 16 пъти радиуса. В нашия случай това е 116, 8 cm.

Разбира се, посочването като отговор на което и да е от получените по-горе приблизителни отговори също носи значителен брой точки.

Задача 10

Във фирма за производство на пластмасови изделия е получена заявка за производство на голям брой съдове с вместимост (обем) 1 литър и с формата на прав кръгов цилиндър (с дъно,

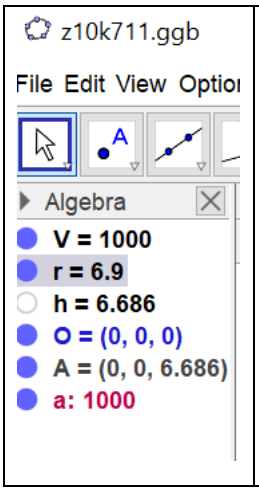
но без капак). С цел икономия на материал, производителят иска да направи повърхнината на съда колкото се може по-малка. Каква следва да е височината на съда (в сантиметри), за да бъде повърхнината най-малка?

Запишете отговора с точност до стотни от сантиметъра.

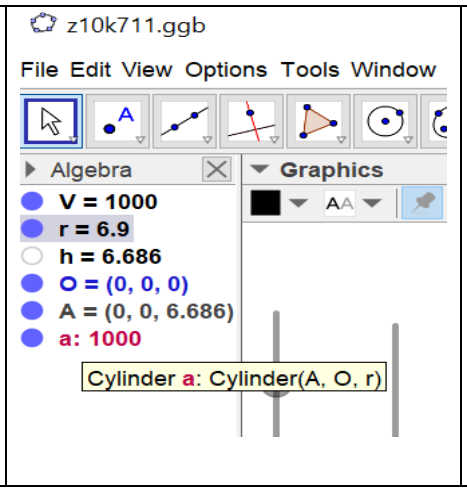
http://course.cabinet.bg/content/202/ggb/z10k910.ggb

Верен отговор 6.83 (8 т.)

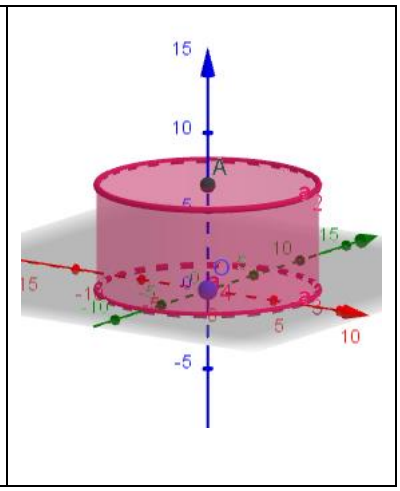
Решение. Разглеждаме помощния файл. В алгебричния прозорец на Фиг. 10.1 се виждат означенията на числа V, r, h, точка O(0,0,0), точка A(0,0,h) и означението a: . Буквите V, r, h в геометрията най-често се използват за означаване съответно на обем, на радиус на окръжност и на височина на обект. В нашия случай задачата е за цилиндър и следва да очакваме, че V е неговият обем, r е радиусът на основата, а h е височината на цилиндъра. Когато показалецът на мишката се задържи по-дълго върху означението a: се появява надпис Cylinder a: Cylinder(A, O, r), който се вижда на Фиг. 10.2. При изпълнение на командата Cylinder(A, O, r) ГеоГебра построява прав цилиндър с център на долната основа в точка O, център на горната основа в точка A и радиус r. Този цилиндър е онагледен в тримерния графичен прозорец (Фиг. 10.3). ГеоГебра е дала име a: на този цилиндър и е записала неговия обем в алгебричния прозорец a: 1000 .



Фиг. 10.1



Фиг. 10.2

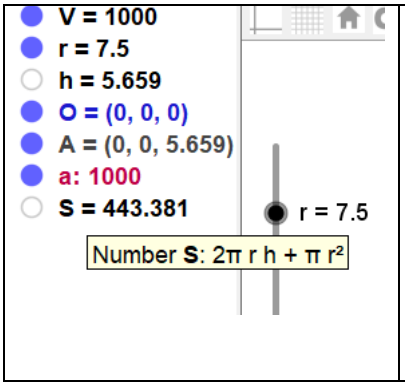


Фиг. 10.3

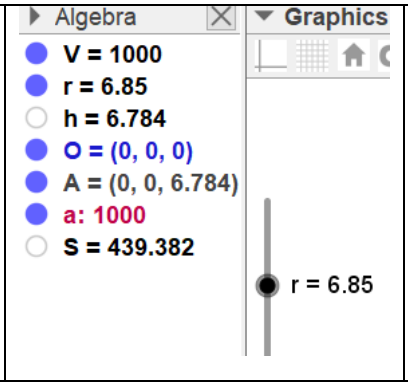
В двумерния графичен прозорец виждаме два вертикални плъзгача и един кръг, за който следва да очакваме, че е основата на цилиндъра. Единият плъзгач е за обема V на цилиндъра и е поставен в положение V = 1000, което е еквивалент в кубически сантиметри на обем от един литър. При решаването на тази задача обемът няма да се мени и точката върху плъзгача за V ще стои неподвижна. Вторият плъзгач е за радиуса r на основата на цилиндъра. Като местим точката на този плъзгач „нагоре-надолу“ се променя стойността на радиуса r. При нарастване на r кръгът в двумерния графичен прозорец също нараства. Едновременно с това се мени и цилиндъра в тримерния графичен прозорец. Радиусът на основата му расте, но неговата височина намалява, при това по такъв начин, че обемът му остава постоянен a: 1000. Причината за това поведение е лесна за откриване. Задържаме показалеца на мишката върху буквата h в алгебричния прозорец на файла. Появява се надпис Number **h:** $V/(\pi r^2)$. Следователно, при зададено r височината се определя така, че обемът да е винаги един и същ – V.

Казаното до тук ни позволява да гледаме на помощния файл, като на инструмент за построяване на всички възможни цилиндри с обем 1000 cm^3. Сред тях ще търсим цилиндър, за който сумата от околната повърхнина ($2\pi rh$) и лицето на основата (πr^2) е възможно най-малка. За целта добавяме, чрез командния ред, още една команда в помощния файл:

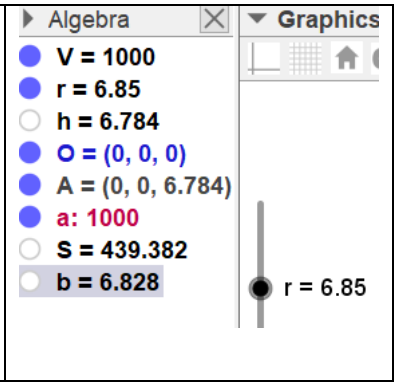
S = 2 πrh + πr^2. След изпълнението ѝ в алгебричния прозорец се появява стойността на търсената повърхнина S (Фиг. 10. 4). При r = 7.5 тя е S = 443,381. С местене на



Фиг. 10.4



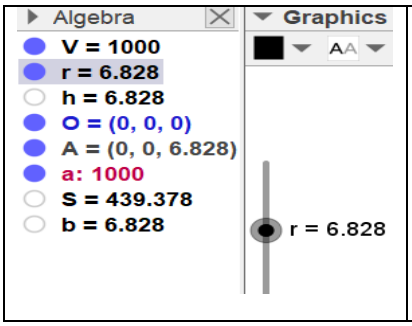
Фиг. 10.5



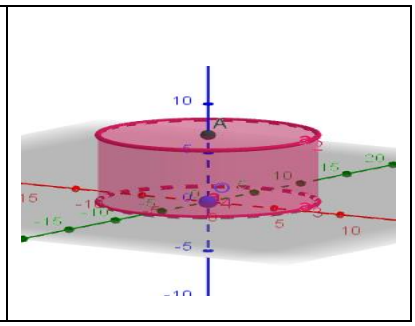
Фиг. 10.6

точката върху плъзгача за r подбираме такова положение, при което S има минимална стойност. Резултатът от такова ръчно търсене е изобразен на Фиг. 10.5. При r = 6.85 получаваме S = 439,382.

За по-точно намиране на радиуса на оптималния цилиндър можем да използваме командата Minimize(<Dependent number>, <Free Number>) за намиране на минимална стойност на величина (като, например, S), която се изменя, когато "свободната" променлива r приема различни стойности. В нашия случай командата изглежда така: Minimize(S, r). Изпълнението на командата добавя един нов ред в алгебричния прозорец - числото b = 6.828 (Фиг. 10.6). То е радиусът на цилиндъра с минимална стойност на S Ако сега в командния ред напишем и изпълним командата r = b (при което стойността на r в помощния файл става равна на b = 6.828), получаваме резултата на Фиг. 10.7: S = 439,378. Самият оптимален цилиндър е изобразен на Фиг. 10.8. Интересното при него е, че радиусът на основата r = 6,828 е равен на височината h = 6,828 . Като отговор следва да запишем числото 6,83.



Фиг. 10.7



Фиг. 10.8

В подготовката на задачите и темата за 9 – 10 клас на състезанието „ВИВА математика с компютър" (25.04.2020 г.) взеха участие Тони Чехларова, Петър Кендеров, Мария Браухле, Ивайло Кортезов, Румяна Ангелова и Младен Вълков. Системата за тестване и оценка, включително и Работният лист, в който участниците нанасят отговорите се поддържа от Георги Гачев. Платформата Вивакогнита, чрез която се осъществява самото

състезание се поддържа от Тодор Брънзов и Ани Самева. Отговорността за описанието на решенията на изложените по-горе задачи е на Петър Кендеров.