Решения на задачите от състезанието

Viva Математика с компютър

Проведено на 25 Април 2020 г. (Пета група – 11 и 12 клас)

http://course.cabinet.bg/index.php?contenttype=publicview&testidselectedbyuser=203

Задача 1

Стойността на cos 21° е:

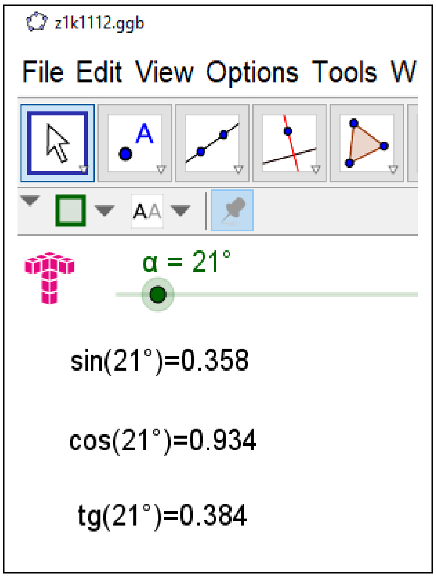
- по-малка или равна на 0,5

- по-голяма от 0,5 и по-малка от 0,8

- по-голяма или равна на 0,8 (3 т.) < верен отговор

http://course.cabinet.bg/content/203/ggb/z1k1112.ggb

Решение. На плъзгача на помощния файл слагаме α = 21° (Фиг. 1.1). Виждаме, че

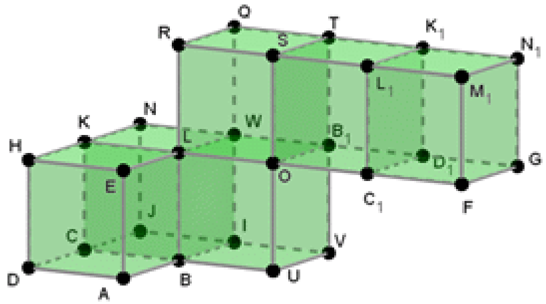


Фиг. 1.1

cos 21° = 0,934. Последният отговор е този, който следва да бъде отбелязан като верен.

Задача 2

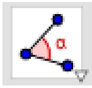
Намерете градусната мярка на ъгъл DGR.

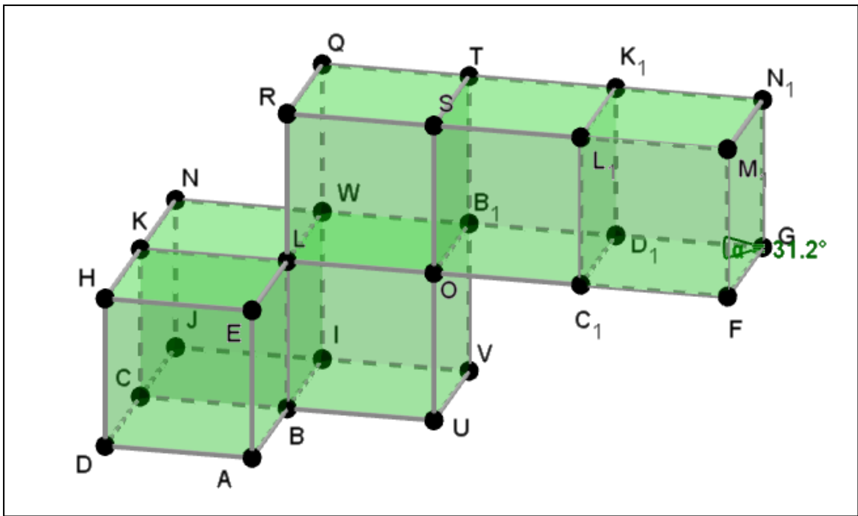


Запишете с точност до десетите.

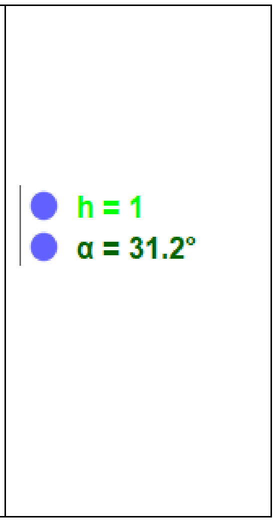
http://course.cabinet.bg/content/203/ggb/z2k1112.ggb

Верен отговор 31.2 (3 т.)

Решение. В предоставения файл активираме бутона  за измерване на ъгли и щракваме последователно върху точките D, G и R от фигурата. До точка G се появява мярката на ъгъла: 31.2° (Фиг. 2.1). Поради близостта на записа до буквата G и припокриването с нея, можем да отворим алгебричния прозорец и там да прочетем стойността на ъгъла α (Фиг.2.2). Като отговор записваме 31.2.



Фиг. 2.1



Фиг. 2.2

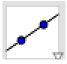
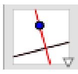
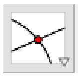
Задача 3

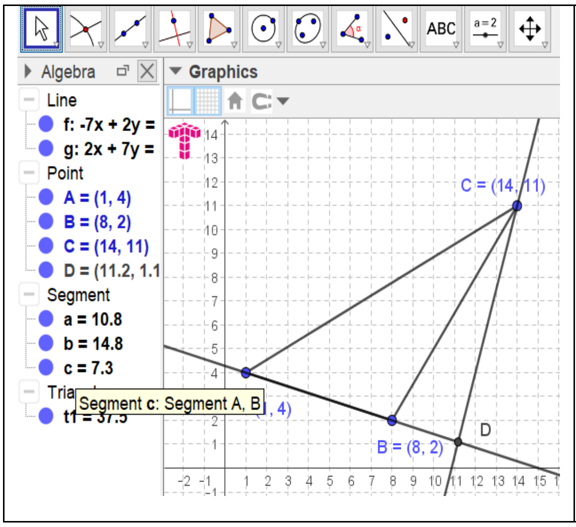
Намерете дължината на най-голямата височина на триъгълника ABC, ако A(1; 4), B(8, 2), C(14, 11).

Запишете с точност до десетите.

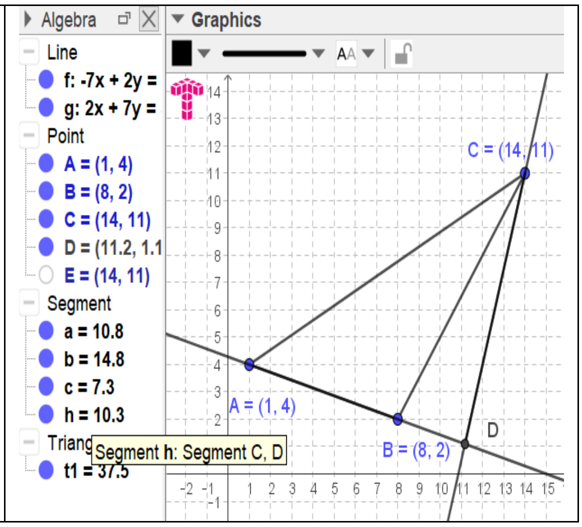
http://course.cabinet.bg/content/203/ggb/z3k1112.ggb

Верен отговор 10.3 (3 т.)

Решение. Лицето триъгълника се изчислява по формулата (1/2)x(основата)x(височината). Която и страна на триъгълника да вземем като основа, полученото лице ще е едно и също. Затова най-дългата височина съответства на най-късата страна на триъгълника. В нашия случаи това е страната AB. Това се вижда с просто око, но може да се забележи и в алгебричния прозорец на помощния файл (Фиг. 3.1), където е написано, че отсечката AB, означена с буквата *c*, има дължина 7,3 , докато останалите страни имат дължина a = 10.8 и b = 14,8. Най-лесно можем да намерим дължината на височината, като я построим. С бутона  прекарваме права през точките A и B. С бутона  спускаме перпендикулярна права от точка C към току-що построената права през A и B. Пресичаме (с бутона ) двете прави и намираме петата на височината точка D. Остава да намерим дължината на отсечката CD. Това става, като я построим с бутона . Резултатът е показан на Фиг. 3.2 : h= 10.3. Това записваме като отговор на задачата.



Фиг. 3.1



Фиг. 3.2

Задача 4

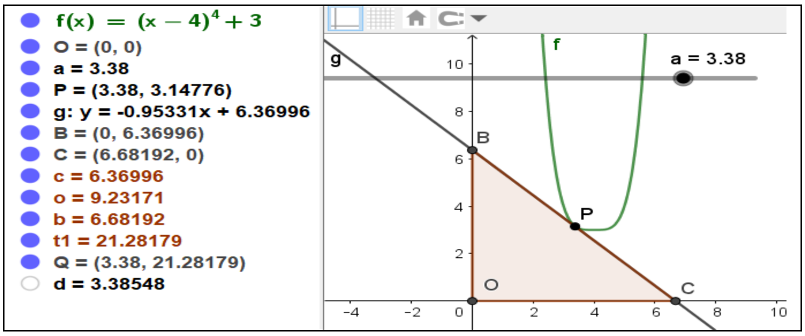
Точка P е от графиката на функцията $y = (x - 4)^4 + 3$, лежи в първи квадрант и първата ѝ координата е между 0 и 4. Допирателната към графиката на функцията в точка P и координатните оси заграждат триъгълника OCB. Какво е най-малкото възможно лице на този триъгълник?

Запишете отговора с точност до стотните.

http://course.cabinet.bg/content/203/ggb/z4k1112.ggb

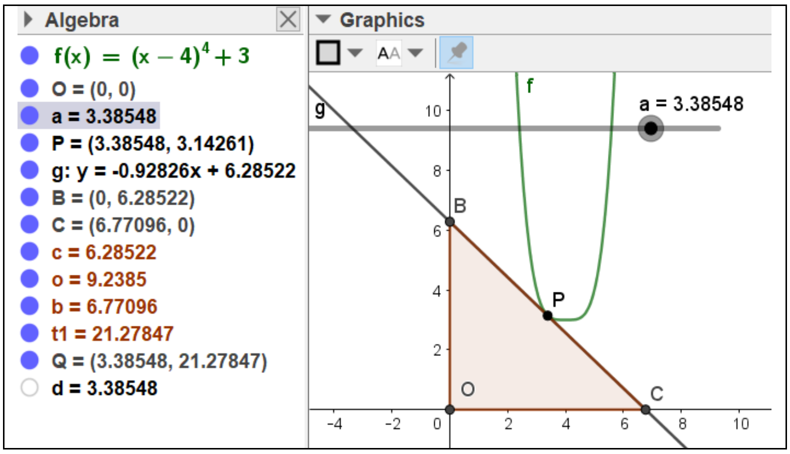
Верен отговор 21.28 (5 т.)

Решение. В помощния файл, с движение на точката по плъзгача за променливата *a*, се мести и точката P. С това се променя лицето на триъгълника OCB, което в алгебричния прозорец е означено с t1 (Фиг. 4.1). Това позволява „на ръка“ да потърсим стойност на плъзгача *a* , при която лицето t1 е минимално. Резултатът от едно такова действие е показан на Фиг. 4.1: t1 = 21,28179. Като отговор можем да запишем 21,28.

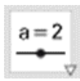
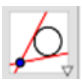


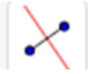
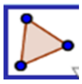
Фиг. 4.1

Геогебра разполага с команда за по-точно намиране на минималното възможно лице на триъгълника OCB. Тази команда е Minimize(<Dependent Number>, <Free Number>). Тя намира минималната стойност на величина (като, например, лицето t1), която зависи от стойността на друго „свободно“ число (например – числото *a*). В нашия случай командата изглежда така: Minimize(t1, a). Изпълнението ѝ изкарва на екрана едно число (на Фиг. 4.1 това е числото d = 3,38548, записано най-отдолу в алгебричния прозорец). Смисълът на това число е, че ако свободната променлива *a* стане равна на d, стойността на зависимата променлива t1 ще е минимална. Затова, ако сега в Командния ред на помощния файл напишем и изпълним командата a = d, ще изчислим минималната стойност на t1 . Резултатът е показан на Фиг. 4.2 : t1=21,27847. След закръгляне до стотни отново стигаме до отговора 21,28.



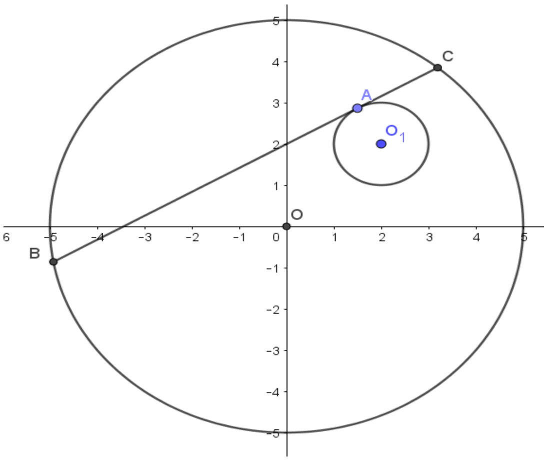
Фиг. 4.2

Както видяхме, присъствието на помощния файл съществено опрости решението на задачата. Същата задача, обаче, можеше да бъде дадена и без помощен файл. С очакване, участниците сами да си направят такъв. Затова тук накратко ще опишем, как е построен помощният файл. Задаването на графиката на функцията $y = (x - 4)^4 + 3$ става с командата (x – 4)^4 + 3. Изпълнението на командата (с клавиша „Нов ред“ (Enter)) извежда на екрана графиката на функцията. Плъзгачът за свободната променлива *a* се прави с бутона . След това се определя точка P от графиката на функцията $y = (x - 4)^4 + 3$, като се зададат координатите на точката $P(a, (a - 4)^4 + 3)$. Това става, като в командния ред се впише командата P=(a, (a – 4)^4 + 3). При активиран бутон  за построяване на допирателна и последователно щракване върху точка P и след това върху графиката на функцията, на екрана се появява допирателната. Пресечните ѝ точки (C и B) с координатните оси се намират с бутона

. Лицето на триъгълника t1 се изчислява с активиране на бутона  и щракване върху точките O,C и B.

Задача 5

Дадени са две окръжности k и k_1. Окръжността k е с център в т. O(0,0) и има радиус 5 cm. Окръжността k_1 е с център в т. $O_1(2,2)$ и има радиус 1 cm. Точка A е от окръжността k_1. Допирателната към k_1 в точка A пресича окръжността k в точките B и C. Каква е дължината на отсечката OA, когато хордата BC е възможно най-дълга?

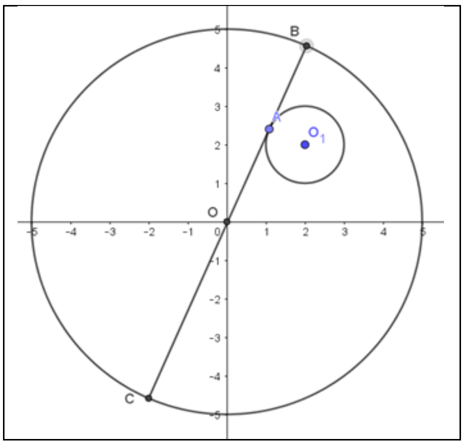


Запишете отговора с точност до стотните.

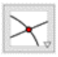
http://course.cabinet.bg/content/203/ggb/z5k1112.ggb

Верен отговор 2.65 (5 т.)

Решение. Може да се използва помощният файл към задачата, където с „ръчно“ местене на точката A или с командата Maximize(<Dependent Number>, <Point on Path>) да се намери положението на точката A, когато отсечката BC е най-дълга. Не е никаква изненада (Фиг. 5.1), че това става, когато BC е диаметър на k (за това можехме да се досетим и без помощен файл, защото диаметърът е възможно най-дългата хорда).



Фиг. 5.1

Така задачата ни се свежда до намиране на дължината на допирателната от точка O към k_1 . Самата допирателна права може да се построи с бутона , а пресечната точка A на допирателната права с k_1 може да се построи с бутона  . Дължината на отсечката ОА може да се измери с бутона  . Тя е 2.64575 cm. Като отговор следва да запишем 2,65.

Дължината на ОА може да се намери и с теоремата на Питагор. Триъгълникът OO_1A в случая е правоъгълен. Следователно, $OA^2 = (OO_1)^2 - (AO_1)^2 = 8 - 1 = 7$. Точният отговор е $\sqrt{7}$.

В полето за отговор следва да се запише 2.65.

Задача 6

При кликване върху малко квадратче то променя цветността си, т.е., бялото става черно, а черното – бяло. След кликване върху едно квадратче Михаела установила, че получената композиция има ос на симетрия, но няма център на симетрия. Върху кое от посочените квадратчета може да е кликнала Михаела?

Можете да посочите повече от един отговор

☐ А1

☐ А3 < верен отговор

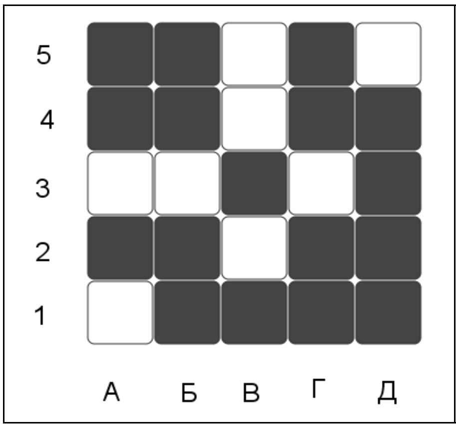
☐ В1

☐ В5

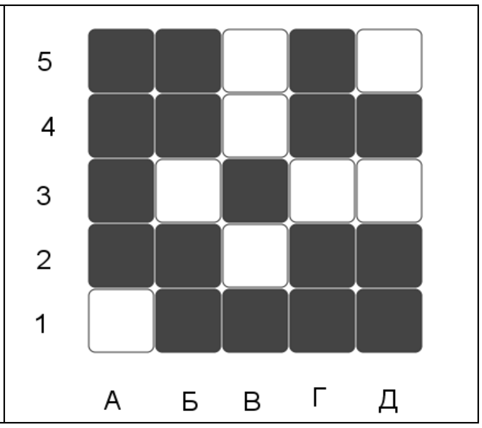
☐ Д3 < верен отговор

http://course.cabinet.bg/content/203/ggb/z6k1112.ggb

Решение. Особеността на тази задача до голяма степен е скрита във формулировката ѝ. Човек може да очаква, че следва да се изпробват със щракване всичките 5 x 5 = 25 квадратчета. Всъщност в условието на задачата е казано „Върху кое от посочените квадратчета…..“ А „посочените квадратчета“ са само 5 и са изброени: А1, А3, В1, В5 и Д3. Непосредствената проверка показва, че верните отговорите са два: А3 и Д3 . На Фиг 6.1 . се вижда резултатът от щракването върху А3. Получава се картина, която е симетрична относно диагонала А5 - Д1, но не е централно симетрична относно единствено възможния център на симетрия –квадратчето в средата на картината. Фиг. 6.2 е резултат от щракване върху Д3. Има симетрия относно диагонала А1 – Д5, но няма център на симетрия.



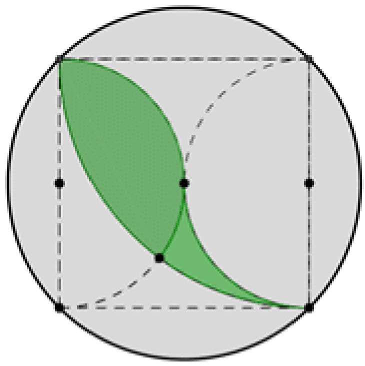
Фиг. 6.1



Фиг. 6.2

Задача 7

Колко процента от кръга са оцветени в зелено?

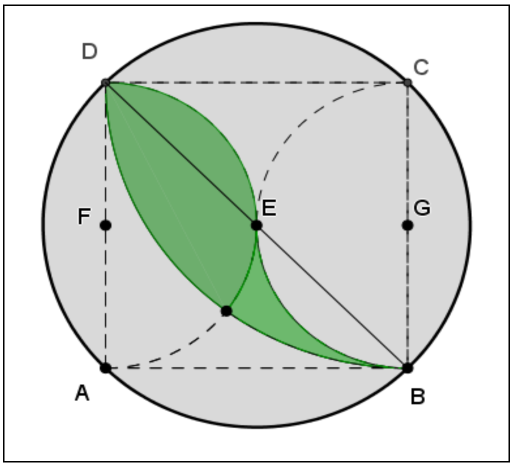


Запишете с точност до десетите.

http://course.cabinet.bg/content/203/ggb/z7k1112.ggb

Верен отговор 18.2 (5 т.)

Решение. В алгебричния прозорец на помощния файл се вижда, че дължината на страната AB на квадрата е 7. На Фиг. 7.1 е начертан диагонала BD. Зелената част е равнолицева с кръговия отрез, получен чрез изваждане на триъгълника BCD от кръговия сектор с център C и дъга BD. Това е така, защото зелената част над (и леко вдясно от) отсечката DE е еднаква със сивата част под (и вляво от) отсечката BE. Лицето на кръговия сектор е една четвърт от лицето на кръг с радиус 7 . Т.е. 49π/4 = 12.25π. Лицето на триъгълника BCD е 49/2 = 24.5. За лицето на кръговия отрез, заграден от отсечката BD и дъгата DB получаваме 12.25π – 24.5 ≅ 13,98451 . Радиусът на кръга от задачата е $3.5\sqrt{2}$. Следователно, лицето на кръга е $3{,}5^2(2\pi) \cong 76{,}96902$. Отношението на двете числа е $\frac{13{,}98451}{76{,}96902} \cong 0{,}18169$. Изразено в проценти това е 18,169 %. Като отговор следва да запишем 18,2.



Фиг. 7.1

Задача 8

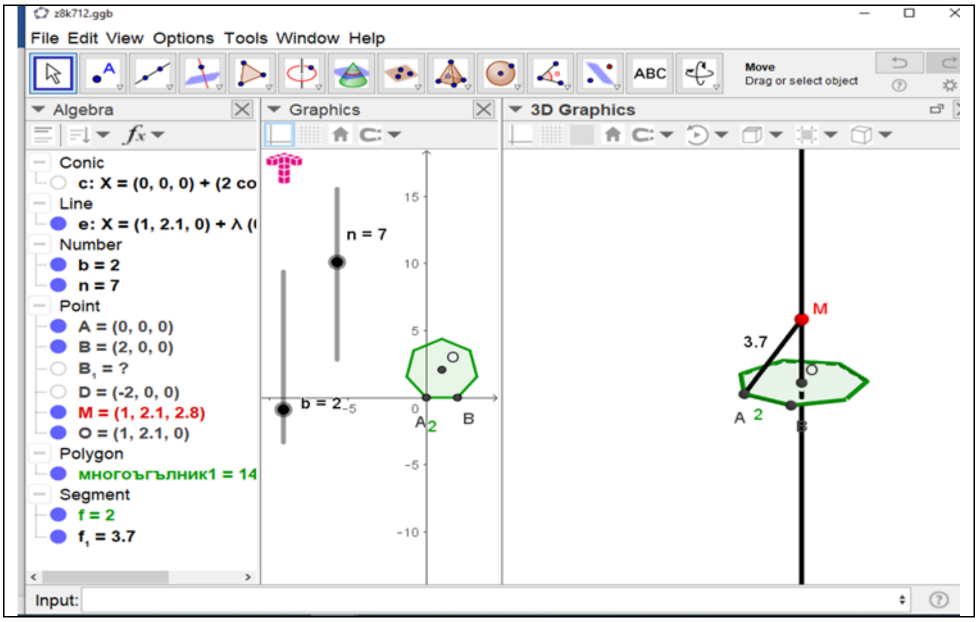
Пръчка с дължина 130 см се използва изцяло след нарязване за изработване на ръбовете на
Пръчка с дължина 130 см се използва изцяло след нарязване за изработване на ръбовете на
пирамида с равни ръбове. Какъв е най-малкият обем на така получена пирамида?

Запишете в см^3 с точност до цялата част.

http://course.cabinet.bg/content/203/ggb/z8k1112.ggb

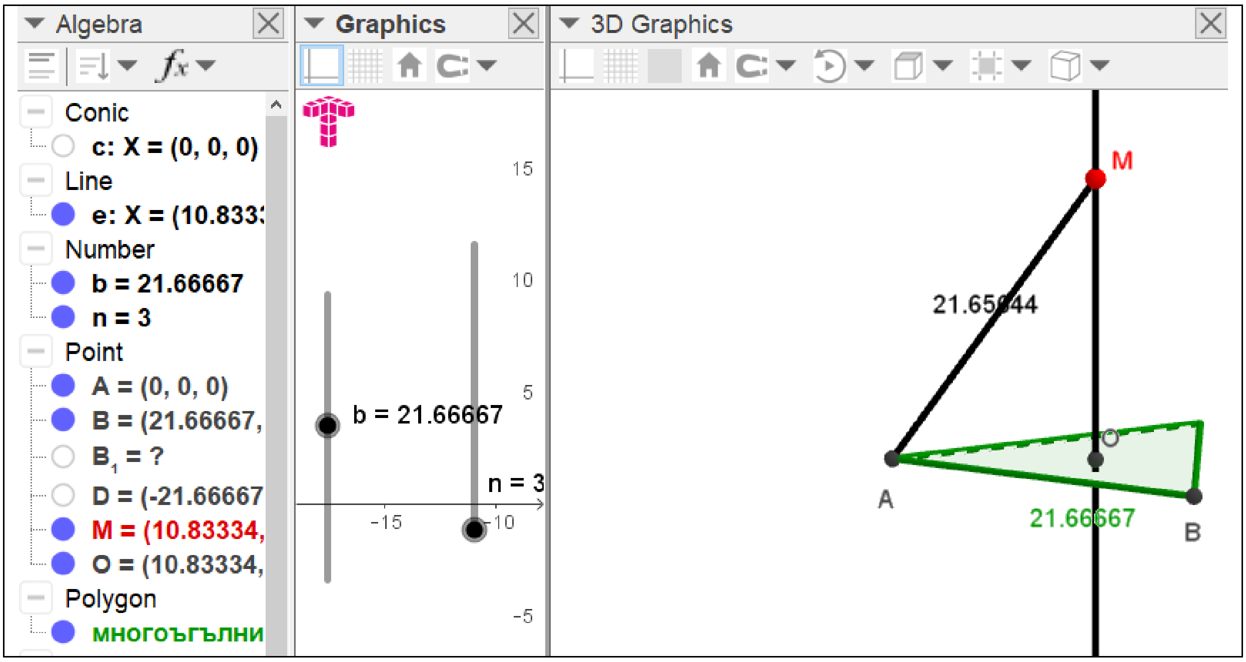
Верен отговор 662 (5 т.)

Решение. В помощния файл към тази задача има два плъзгача – за броя на върховете на равностранния многоъгълник в основата на пирамидата и за еднаквата дължина на всички ръбове на пирамидата. Те са разположени в „равнинния“ геометричен прозорец (в средата на Фиг. 8.1), който често наричаме „двумерен графичен прозорец“ или просто „графичен прозорец“. В същия прозорец е изобразен и многоъгълникът в основата на пирамидата. В „пространствения“ геометричен прозорец, който е най-вдясно и който ще наричаме „тримерен графичен прозорец“ или „прозорец за тримерна графика“, не е изобразена цялата пирамида, а само основата ѝ и един неин околен ръб - AM. Изобразена е и дължината на отсечката AM. Върхът на пирамидата, точка M , може да се движи надолу и нагоре по вертикалната ос.

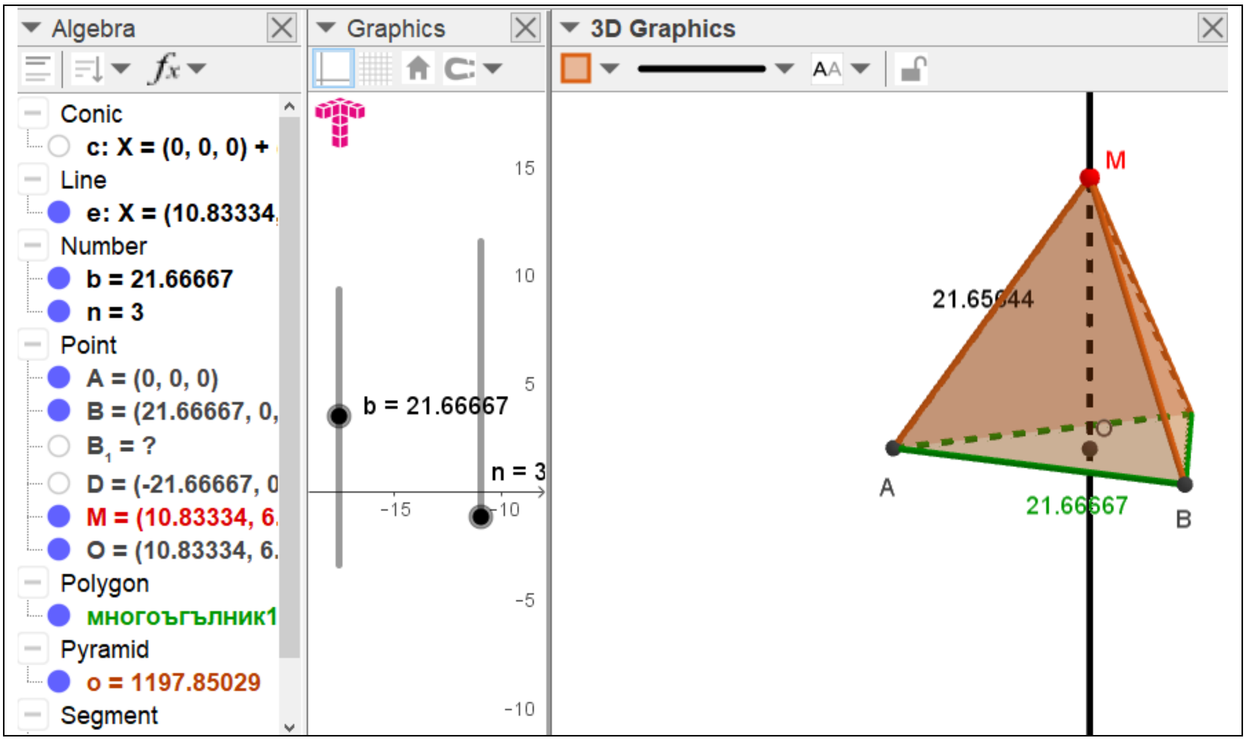


Фиг. 8.1

Чрез местене на точка M можем да търсим такова нейно положение, при което дължината на AM да се изравни с дължината на ръба в основата на пирамидата. В началния вариант на помощния файл плъзгачът за броя на върховете на основата на пирамидата е сложен на 7. Избираме коя да е стойност на другия плъзгач (например 2, както е на Фиг. 8.1) и започваме да движим точка M с цел дължината на AM да стане равна на зададената дължина на ръба. Оказва се, че това е невъзможно. Дължината на AM е винаги по-голяма от дължината на основния ръб. Опитваме с други дължини на ръба. Отново експериментите показват, че няма седмоъгълна пирамида с равни ръбове. По същия начин се убеждаваме, че няма такава осмоъгълна или „повече“ - ъгълна пирамида. Опитваме с шестоъгълна пирамида. Резултатът сега е съвсем друг. При каквато и да е дължина на основния ръб, единственото място за точка M, при което дължината на AM е равна на дължината на ръба е центърът O на равностранния шестоъгълник в основата на пирамидата. В този случай нямаме пирамида, защото се получава равнинен обект (височината е нула). Остава да разгледаме останалите случаи – триъгълна, четириъгълна и петоъгълна пирамида. Опитите с помощния файл показват, че при всяка дължина на ръба такива пирамиди съществуват. Остава да пресметнем обемите на тези пирамиди, когато еднаквите им ръбове са направени от пръчка с обща дължина 130 cm.
На Фиг. 8.2 е изобразен случая на триъгълна пирамида с 6 ръба, всеки от които има една и съща дължина $\frac{130}{6} \cong 21{,}6667$ cm. Дължината на основните ръбове се задава с местене на точката по плъзгача за b или като в алгебричния прозорец се щракне двукратно върху b, при което се открива възможност, дължината да се впише чрез клавиатурата. Положението на точката M се избира така, че дължината на AM да е колкото е възможно по-близка до 21,6667 cm. Ще използваме бутоните на ГеоГебра за да онагледим тази пирамида. Едновременно с това ГеоГебра ще изчисли и интересуващия ни обем на пирамидата. След задействане на бутона  за построяване на пирамида, трябва да кажем кой многоъгълник ще служи като основа на пирамидата и коя точка ще е неин връх. За целта, в прозореца за тримерна графика последователно щракваме върху триъгълника и, след това върху точка M . ГеоГебра веднага изобразява пирамидата (Фиг. 8.3), дава ѝ име „o“ в алгебричния прозорец и записва там нейния обем o = 1197,85029.

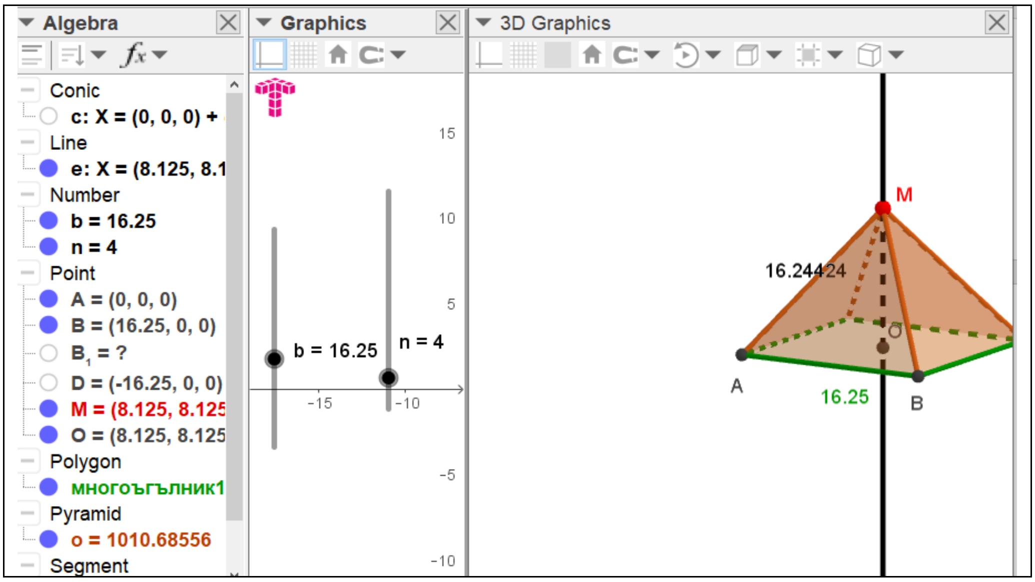


Фиг. 8.2



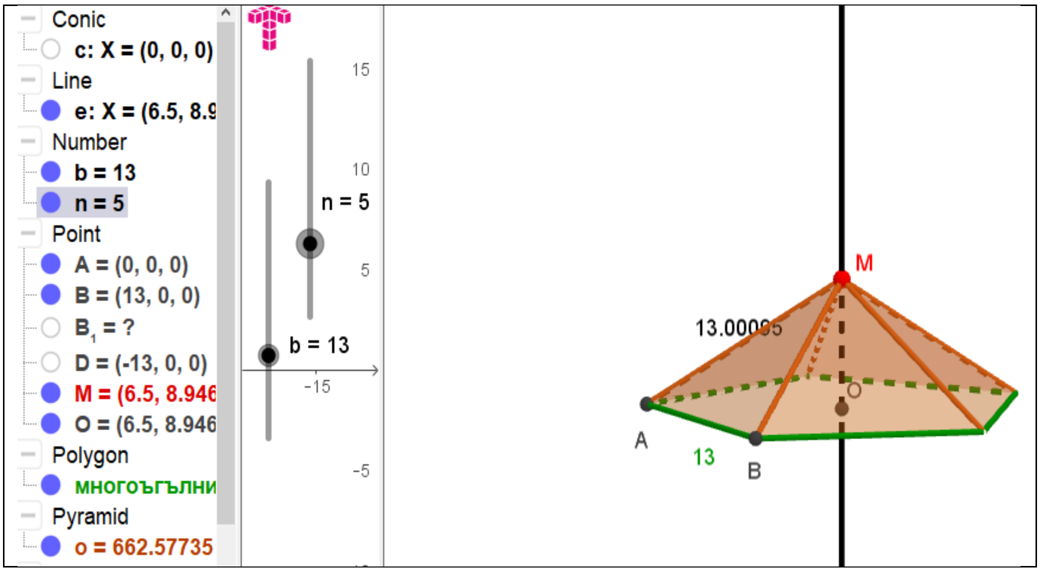
Фиг. 8.3

Правим същото за четириъгълна пирамида. Ръбовете сега са 8 и всеки има дължина $\frac{130}{8} \cong$ 16,25 cm. Задаваме, съответно, стойност 4 на плъзгача за броя на върховете на основата и стойност 16,25 на другия плъзгач. Наместваме с влачене точката M така, че отсечката AM да има дължина колкото може по-близка до 16,25. Получената пирамида е онагледена на Фиг. 8.4 . В алгебричния прозорец е указано, че обемът на пирамидата сега е o = 1010,68556 кубически сантиметра.



Фиг. 8.4

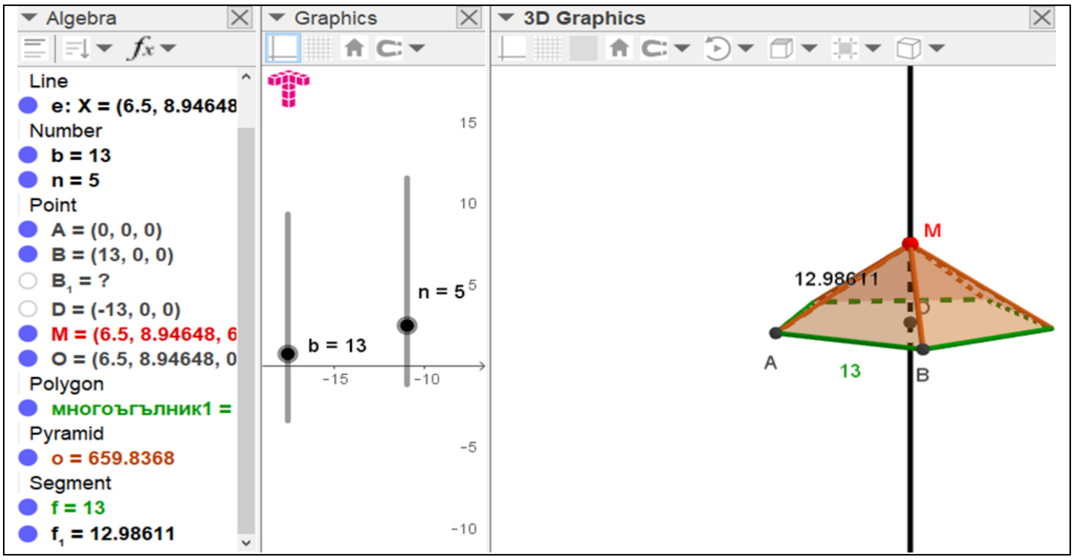
Извършваме същите действия и за петоъгълна пирамида. Резултатът е показан на Фиг. 8.5.



Фиг. 8.5

Обемът сега е o = 662,57735. Ясно е, че като отговор на задачата трябва да сложим обема на петоъгълната пирамида, който е най-малък. Като отговор можем да запишем 663.

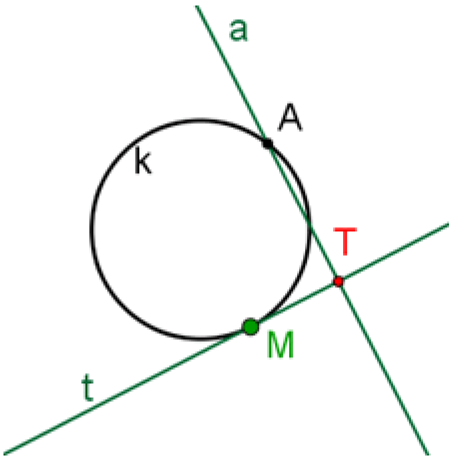
Експериментите с помощния файл показват, че обемът o на пирамидата се променя силно при дори малко разместване на точка M. На Фиг. 8. 5 AM = 13.00028 >13. Нека подберем друго подходящо място за точка M, така че дължината на AM пак да е близка до 13, но да е по-малка от 13. Това е направено на Фиг. 8.6, където AM = 12.98611. За обема се получава o = 659,8368. Разликата с предишния резултат е значителна. Истинският отговор е 662,40172.



Фиг. 8.6

Задача 9

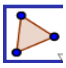
Нека A е фиксирана точка от окръжността k. За всяка точка M от k означаваме с T пресечната точка на допирателната t към k в точка M и перпендикулярната към нея права a, минаваща през A. При една обиколка на M по окръжността, точката T очертава крива, наречена кардиоида. Ако радиусът на окръжността k е 24,7 cm, намерете обиколката на тази кардиоида.

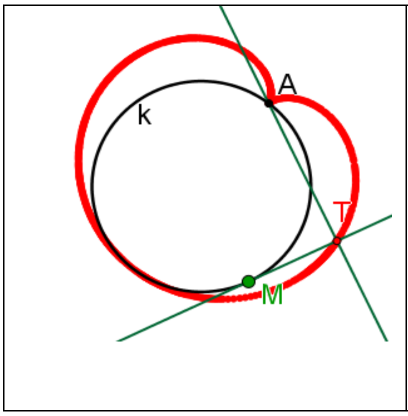


Запишете в cm с точност до десетите

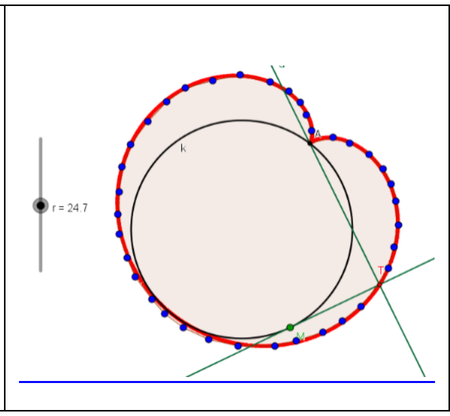
http://course.cabinet.bg/content/203/ggb/z9k1112.ggb

Верен отговор 197.6 (8 т.)

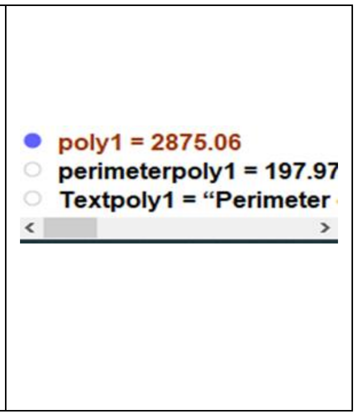
Решение. Отваряме помощния файл и поставяме плъзгача в положение r = 24,7. При задействан бутон  влачим точка M до извършване на пълна обиколка около окръжността k . Червената точка T оставя, като своя диря, изобразената на Фиг. 9.1 крива, която прилича на сърце и затова е наречена „кардиоида“. В момента не разполагаме с готов инструмент, с чиято помощ да намерим дължината на кардиоидата. Налага се да импровизираме. Една добра идея за приблизително намиране на търсената дължина е да приближим кардиоидата с многоъгълник с много върхове и да измерим периметъра на многоъгълника. При активиран бутон  отбелязваме с щракване последователно точки върху кардиоидата, докато извършим пълна обиколка около нея и щракнем отново върху първата отбелязана точка. Получаваме многоъгълник с много върхове, който е изобразен на Фиг. 9.2 . В алгебричния прозорец на файла този многоъгълник е записан като poly1= 2875,06. Числото 2875,06 е лицето на многоъгълника. На нас ни трябва да намерим периметъра му. Това може да стане, като задействаме бутона  за измерване на дължини на обекти и щракнем върху poly1. В алгебричния прозорец



Фиг. 9.1



Фиг. 9.2

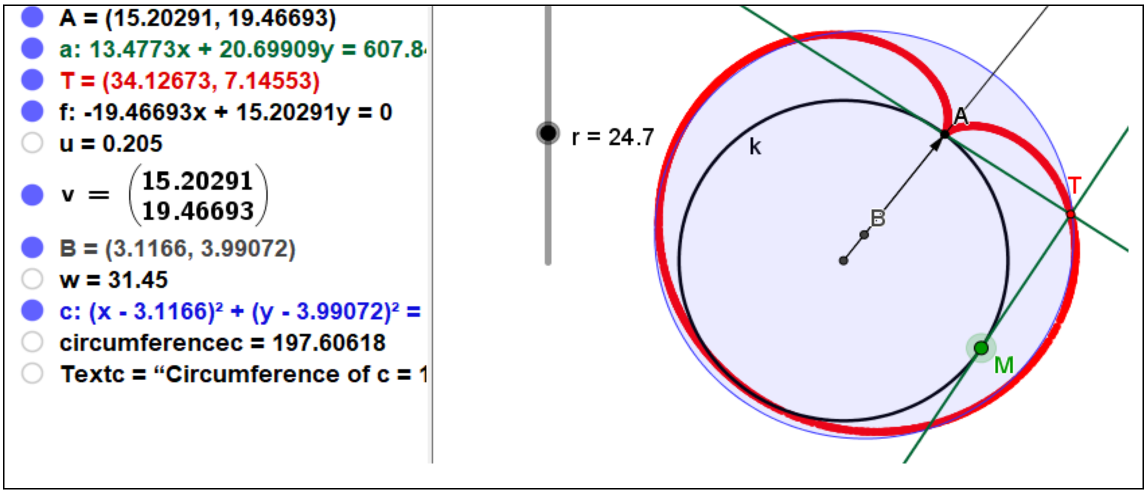


Фиг. 9.3

се появява записът, показан на Фиг. 9.3: perimeterpoly1 = 197.97. Като отговор може да се запише 198.

Колкото е по-голям броя на върховете на многоъгълника, толкова по-добро е приближението на периметъра на кардиоидата.

За решаването на задачата можем да опитаме и друга идея. Да построим окръжност, която относително добре („на око“) приближава периметъра на кардиоидата и да вземем обиколката на тази окръжност като дължина на търсения периметър. Това е реализирано на Фиг. 9.4.



Фиг. 9.4

Приближаващата окръжност е записана в алгебричния прозорец с името c. Периметърът ѝ е записан като circumferencec = 197,60618. Виждаме, че двата резултата (197,97 и 197,6) са близки. Можем да запишем като отговор някое междинно число, например – средно аритметичното на двете числа - 197,8.

Задача 10

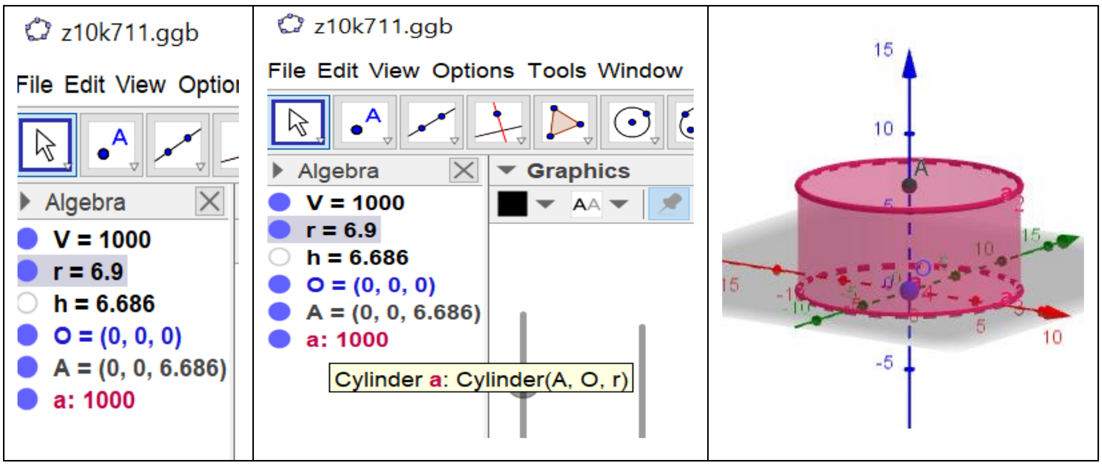
Във фирма за производство на пластмасови изделия е получена заявка за производство на голям брой съдове с вместимост (обем) 1 литър и с формата на прав кръгов цилиндър (с дъно, но без капак). С цел икономия на материал, производителят иска да направи повърхнината на съда колкото се може по-малка. Какво е отношението на височината на съда към диаметъра му, когато повърхнината му е най-малка?

Запишете като десетична дроб с точност до стотните.

http://course.cabinet.bg/content/203/ggb/z10k1112.ggb

Верен отговор 0.5 (8 т.)

Решение. Разглеждаме помощния файл. В алгебричния прозорец на Фиг. 10.1 се виждат означенията на числа V, r, h, точка O(0,0,0), точка A(0,0,h) и a: . Буквите V, r, h в геометрията най-често се използват за означаване съответно на обем, на радиус на окръжност и на височина на обект. В нашия случай задачата е за цилиндър и следва да очакваме, че V е неговият обем, r е радиусът на основата, а h е височината на цилиндъра. Когато показалецът на мишката се задържи по-дълго върху означението a: се появява надпис Cylinder a: Cylinder(A, O, r), който се вижда на Фиг. 10.2. При изпълнение на командата Cylinder(A, O, r) ГеоГебра построява прав цилиндър с център на долната основа в точка O, център на горната основа в точка A и радиус r. Този цилиндър е онагледен в тримерния графичен прозорец (Фиг. 10.3). ГеоГебра е дала име a: на този цилиндър и е записала неговия обем в алгебричния прозорец a: 1000 .

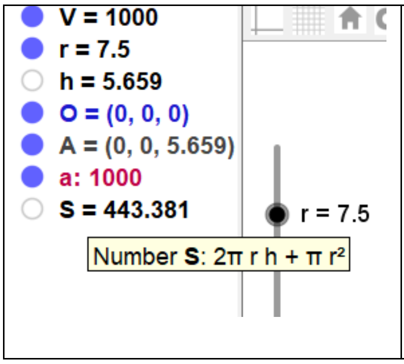


Фиг. 10.1 Фиг. 10.2 Фиг. 10.3

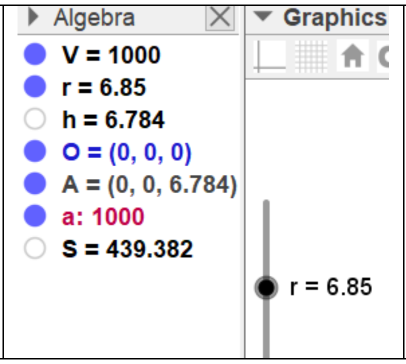
В двумерния графичен прозорец виждаме два вертикални плъзгача и един кръг, за който следва да очакваме, че е основата на цилиндъра. Единият плъзгач е за обема V на цилиндъра и е поставен в положение V = 1000, което е еквивалент в кубически сантиметри на обем от един литър. При решаването на тази задача обемът няма да се мени и точката върху плъзгача за V ще стои неподвижна. Вторият плъзгач е за радиуса r на основата на цилиндъра. Като местим точката на този плъзгач „нагоре-надолу“ се променя стойността на радиуса r. При нарастване на r кръгът в двумерния графичен прозорец също нараства. Едновременно с това се мени и цилиндърът в тримерния графичен прозорец. Радиусът на основата му расте, но неговата височина намалява, при това по такъв начин, че обемът му остава постоянен а: 1000. Причината за това поведение е лесна за разбиране. Задържаме показалеца на мишката върху буквата h в алгебричния прозорец на файла. Появява се надпис Number **h:** V/($\pi\, r^2$). Следователно, при зададено r височината се определя така, че обемът да е винаги един и същ – V.

Казаното до тук ни позволява да гледаме на помощния файл, като на инструмент за построяване на всички възможни цилиндри с обем 1000 cm^3. Сред тях ще търсим цилиндър, за който сумата от околната повърхнина $(2\pi rh)$ и лицето на основата (πr^2) е възможно най-малка. За целта добавяме, чрез командния ред, още една команда в помощния файл:

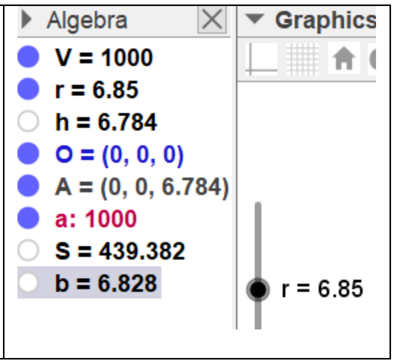
S = $2\pi rh$ + πr^2. След изпълнението ѝ в алгебричния прозорец се появява стойността на търсената повърхнина S (Фиг. 10. 4). При r = 7.5 тя е S = 443,381. С местене на



Фиг. 10.4



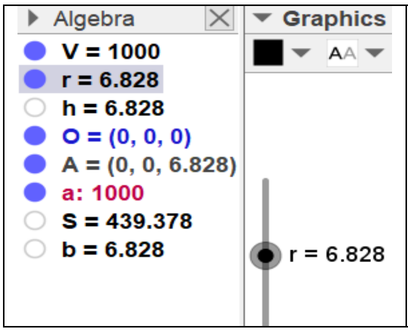
Фиг. 10.5

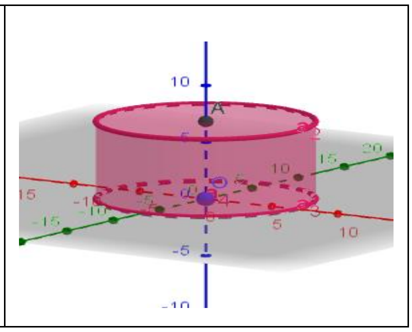


Фиг. 10.6

точката върху плъзгача за r подбираме такова положение, при което S има минимална стойност. Резултатът от такова ръчно търсене е изобразен на Фиг. 10.5. При r = 6.85 получаваме S = 439,382.

За по-точно намиране на радиуса на оптималния цилиндър можем да използваме командата Minimize(<Dependent Number>, <Free Number>) за намиране на минимална стойност на величина (като, например, S), която се изменя, когато “свободната“ променлива r приема различни стойности. В нашия случай командата изглежда така: Minimize(S, r). Изпълнението на командата добавя един нов ред в алгебричния прозорец - числото b = 6.828 (Фиг. 10.6). То е радиусът на цилиндъра с минимална стойност на S Ако сега в командния ред напишем и изпълним командата r = b (при което стойността на r в помощния файл става равна на b = 6.828), получаваме резултата на Фиг. 10.7: S = 439,378. Самият оптимален цилиндър е изобразен на Фиг. 10.8. Интересното при него е, че радиусът на основата r = 6,828 е равен на височината h = 6,828. Следователно, височината се отнася към диаметъра на основата като 1:2. Като отговор следва да запишем числото 0,5.





Фиг. 10.7 Фиг. 10.8

В подготовката на задачите и темата за 11 – 12 клас на състезанието „ВИВА математика с компютър“ (25.04.2020 г.) взеха участие Тони Чехларова, Петър Кендеров, Мария Браухле, Ивайло Кортезов, Румяна Ангелова и Младен Вълков. Системата за тестване и оценка, включително и Работният лист, в който участниците нанасят отговорите се поддържа от Георги Гачев. Платформата Вивакогнита, чрез която се осъществява самото състезание се поддържа от Тодор Брънзов и Ани Самева. Отговорността за описанието на решенията на изложените по-горе задачи е на Петър Кендеров