Откриване на геометрични закономерности като игра на динамични изследвания

Тони Чехларова, Евгения Сендова
Институт по математика и информатика, Българска академия на науките

1 Увод

В много геометрични задачи предизвикателството е да се намери геометричното място на точки с дадено свойство. Традиционните задачи от този тип в училищната математика се свеждат до намирането на сравнително прости криви. Динамичният софтуер ни дава възможност за доста по-сложни изследвания. В този раздел ще демонстрираме как стратегията *Какво би станало, ако…* може да бъде приложена в контекста на:

- една традиционна геометрична задача
- обобщение на добре позната задача.

1.1 *Динамичен поглед* към класиката

Една класическа задача:

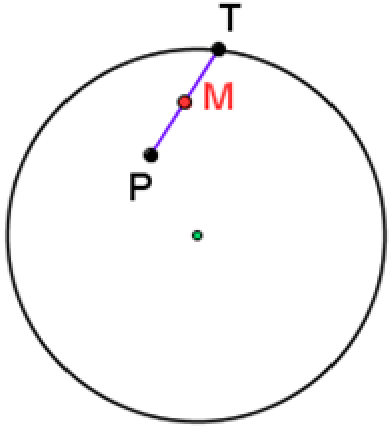
> *Какво е геометричното място на средите на отсечките с краища фиксирана вътрешна точка от кръг и точките по контура му?*

За да решим тази задача, можем да изучим поведението на въпросната среда, когато краят на отсечката описва окръжността.

Започваме с динамична конструкция (например в Геогебра):

Задача 1. Постройте окръжност и точка **T** върху нея (с помощта на бутона **Circle** или командата **Circle**).
Задача 2. След това постройте точка **P** вътре в кръга (с бутона **Point** или командата **Point**).
Задача 3. Накрая постройте средата **M** на отсечката **PT** (например с командата **Midpoint**).

Конструкцията би трябвало да изглежда така (**html** **ggb**)[1] :

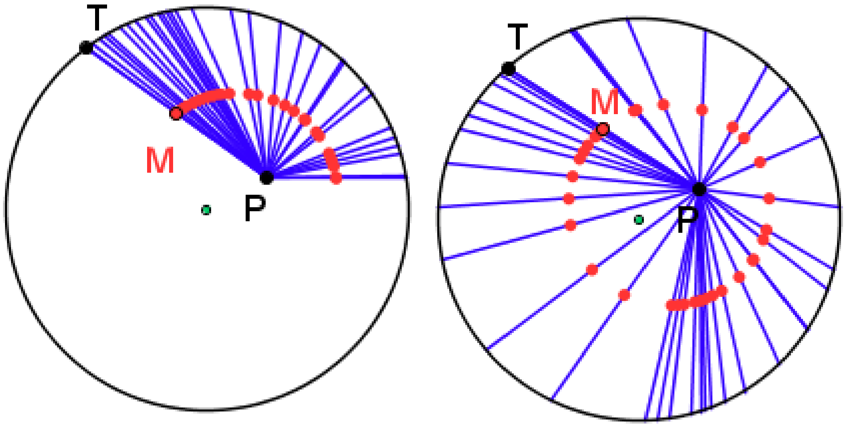


Задача 4. Сега може да наблюдавате следата, която **M** оставя при движението си. За целта поставете **M** (а при желание и цялата отсечка **PT**) в *режим на следа* (**Trace mode)** и влачете **T**

[1] Можете да използвате първата връзка, ако имате инсталирана Java, и втората – при инсталирана Геогебра (GeoGebra):

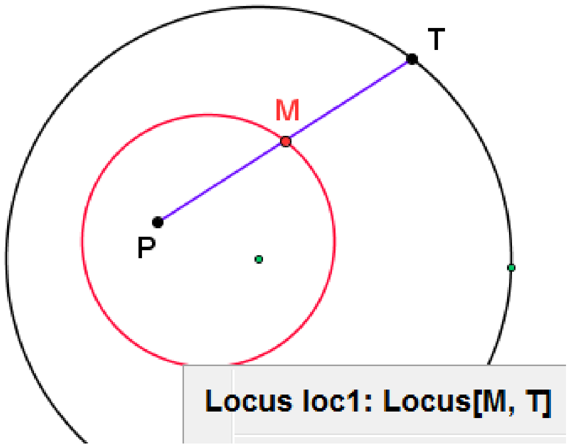
This project has been funded with support from the European Commission in its Lifelong Learning Programme (510028-LLP-1-2010-1-IT-COMENIUS-CMP). This publication reflects the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

по окръжността. Ще видите, че формата на следата, получена от последователни положения на **M** изглежда като множество от точки върху окръжност (**html ggb**).



Има различни начини да засилите предположението си за формата на геометричното място (**html ggb**).

Задача 5. Постройте геометричното място на **M** посредством опцията **Locus** (в падащото меню на бутона **Line**) или командата **Locus**.

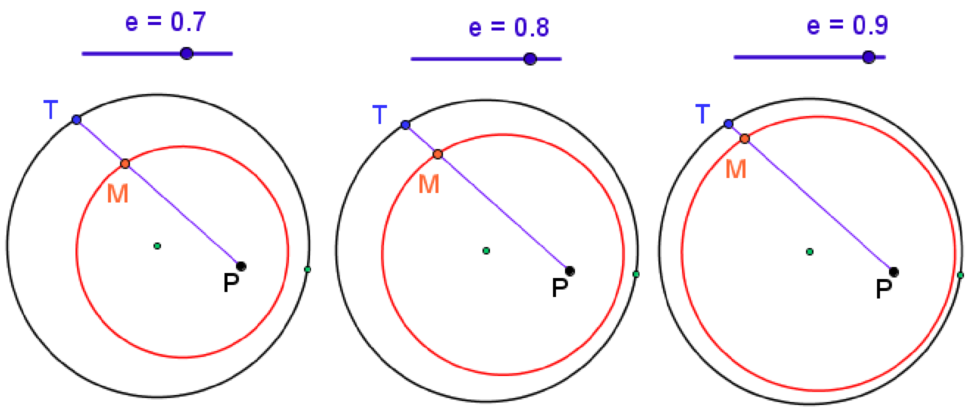


Играта може да продължи. Време е да зададем още въпроси в стил: *Какво ли ще стане, ако…*, например: *Какво ще стане, ако M не е среда, а разделя отсечката във фиксирано отношение?*

А ако ***P*** *е вън от кръга?*

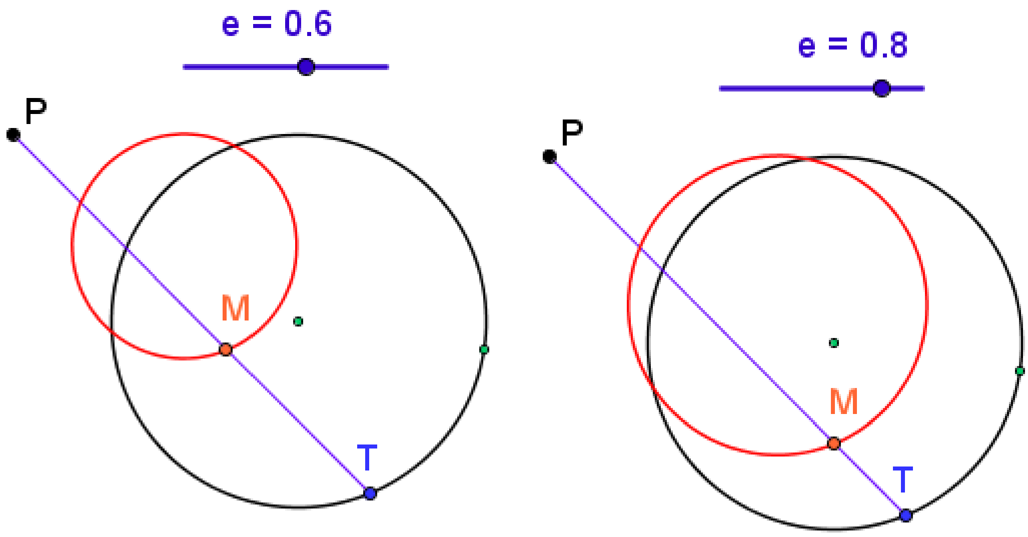
Човек може да предположи, че в този случай геометричното място ще прилича на по-обща крива от втора степен. Дали елипсата е добър кандидат? Ето един добър начин да обощим изследванията си:

Задача 6. Добавете плъзгач за отношението **e,** в което **M** дели отсечката, т.е. **PM** = **e PT** и изследвайте за различни стойности на **e** (**html ggb**):



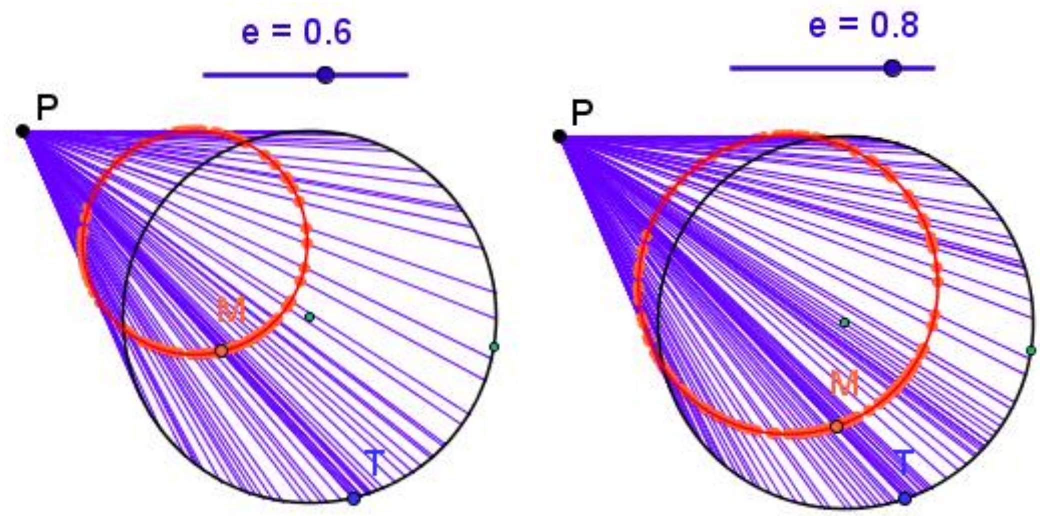
Изглежда, че геометричното място е окръжност!

Задача 7. Проверете какво става, ако **P** е външна за кръга.



Отново окръжност!
Командата **Locus** дава добра представа за формата на геометричното място, но тя работи само за множество от точки. А ако решим да изследваме поведението на отсечката, когато точката **P** е външна за кръга?

Задача 8. Включете режима за оставяне на следа (**Trace mode)** за отсечката **PT**, когато **P** е вън от кръга **(html ggb)** и движете **T** за различни (но фиксирани) стойности на **e**:

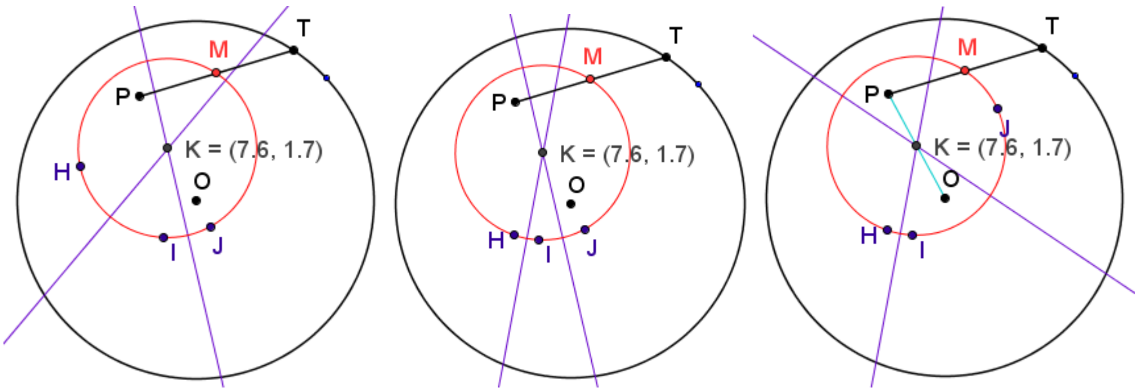


Получава се интересен визуален ефект! Но можем ли да сме сигурни, че **M** описва именно окръжност? Дали не става дума за елипса, която е много близо до окръжност…

Преди да четете по-нататък, опитайте се да измислите как да проверите предположението си. Един начин за това (все още експериментален) е да построите 3 точки (**I**, **J** и **H**) върху геометричното място, да прекарате окръжност през тях и да проверите дали тя съвпада с геометричното място.

Друг начин, който може да ви помогне да докажете строго хипотезата си, е да наблюдавате някои интересни свойства на конструкцията, обогатена с помощни елементи:

Задача 9. Постройте 3 точки (**I**, **J** и **H**) върху геометричното място, след това симетралите на отсечките **IH** и **IJ** и накрая – пресечната им точка **K**. Сега раздвижете някоя от точките **I**, **J** и **H** и наблюдавайте координатите на **K** и дължините на **KJ**, **KI**, **KH.** Каква е връзката между **K** и центъра **O** на дадената окръжност?



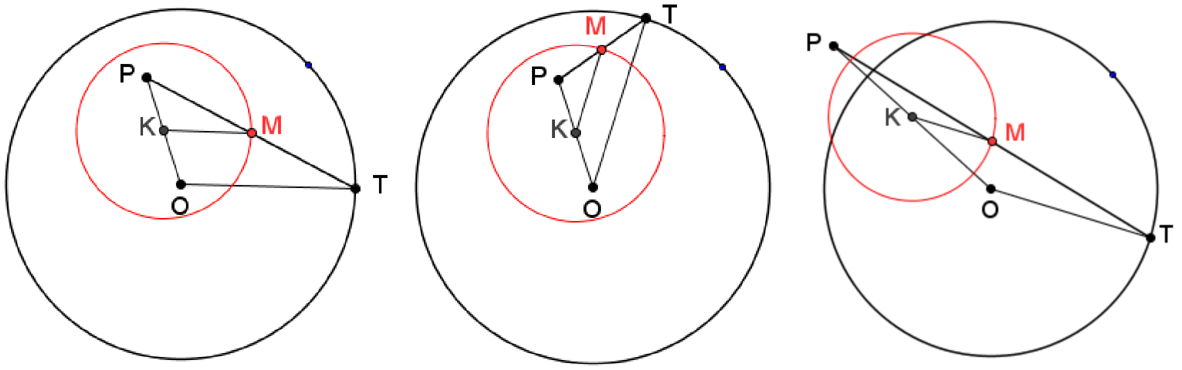
Да, лесно се вижда, че координатите на **K** не се променят. Освен това е изпълнено равенството **KJ** = **KI** = **KH**, което показва (все още експериментално, но **с по-голяма степен на убеденост**), че геометричното място е окръжност.

Освен това сигурно сте забелязали, че центърът **K** на геометричното място е средата на **PO**, където **O** е центърът на дадената окръжност.

Сега вече сме готови да докажем строго, че геометричното място е окръжност с център средата **K** на **PO** (където **O** е центърът на дадената окръжност) и радиус с дължина – половината от дължината на радиуса на дадената окръжност.

Доказателство

Нека **K** е среда на **PO**. Тогава $\mathbf{KM} = \frac{1}{2}\mathbf{OT}$, т.е. средата **M** е на постоянно разстояние от **K** (половината от радиуса **OT** на дадената окръжност), докато точка **T** се движи около **O**.



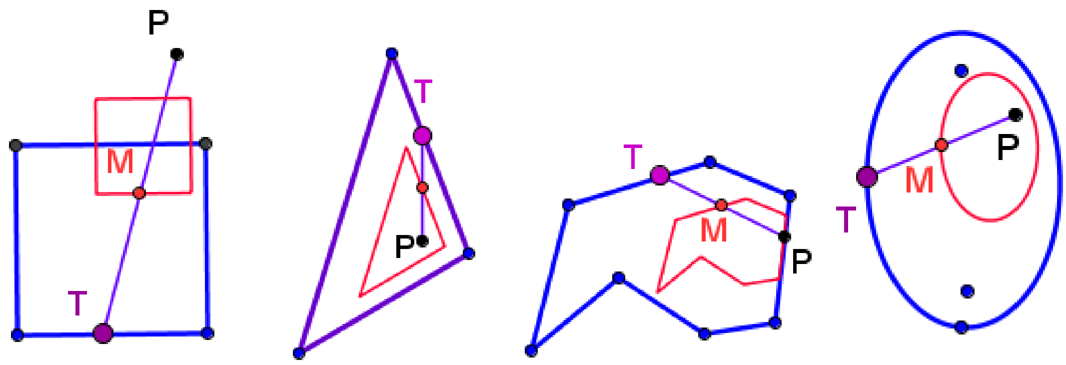
Така доказахме, че търсеното геометрично място на точки е окръжност с център **K** и радиус – половината от радиуса на дадената окръжност.

Задача 10. Докажете теорема за по-общия случай **PM** = **ePT** .
Задача 11. Заменете окръжността с:

- Квадрат (**html ggb**)
- Триъгълник (**html ggb**)
- произволен многоъгълник (**html ggb**)
- елипса (**html ggb**)
- Крива по ваш избор

Задача 12. Обобщете резултатите от вашите изследвания.

Ако вашите ученици са изучавали хомотетия, те могат да я използват, за да решат задачата, но тук е подходящо да обобщят резултатите от Задача 11.



Стратегията *Какво би станало, ако…* допринася в часовете по математика да се култивира изследователски дух – учениците биват насърчавани да изследват интересни частни случаи, да обобщават сравнително прости задачи в различни посоки и дори да атакуват и обобщават олимпийски задачи.

Обобщаване на добре позната задача

В този раздел демонстрираме процес, който е типичен за професионалните математици – обобщаваме известна задача, след това я атакуваме с подходящи за целта средства (в нашия случай с динамични конструкции, които специално сме проектирали в *духа на постепенно усъвършенстване и обогатяване*). Опитваме се да систематизираме изследванията си и разсъждаваме върху идеите, които те пораждат. Това, което най-вече ни интересува, е самият процес, а не толкова описанието на резултатите. Нещо повече, ще се радваме, ако вие, читателите, се вдъхновите сами да атакувате някои от отворените проблеми

Да започнем:

Добре позната задача

Намерете геометричното място на центровете на правилните триъгълници, вписани в правилен триъгълник.

Очакваме, че тази задача е добре позната на по-голямата част от читателите. Но ние ще атакуваме едно обобщение, което се оказва доста амбициозно:

Амбициозно обобщение

*Намерете геометричното място на центровете на правилните **m**-ъгълници, вписани в правилен **n** –ъгълник, $\boldsymbol{m \leq n}$.*

По-нататък ще използваме записа **(*m*;*n*)** за означаване на конструкцията *правилен **m**-ъгълник, вписан в правилен **n**-ъгълник*. Ще отбележим, че в този момент не е ясно за кои ***m*** и ***n*** конструкцията **(*m*;*n*)** е възможна. Ще използваме и понятието „модел **(*m*;*n*)**" за именуване на динамична конструкция за изследване на възможността за съществуване на конструкцията **(*m*;*n*).**

Ще започнем с атака на по-скромната задача, отнасяща се до случай **(3;*n*)** за ***n*** = 3, 4, …

Първа атака – случай (3;*n*)

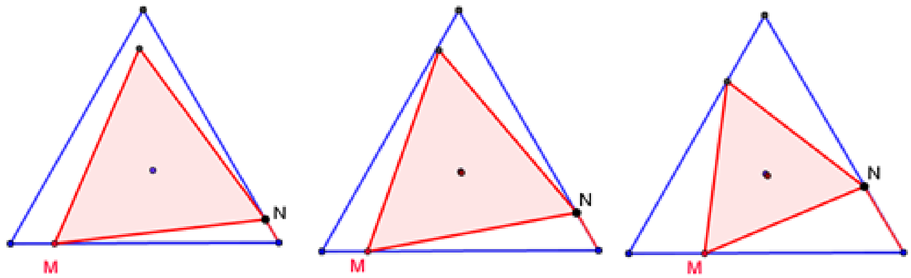
*Намерете геометричното място на центровете на правилните триъгълници, вписани в правилен **n**-ъгълник.*

2.1 Примитивен (ръчен) динамичен модел

Построяваме равностранен триъгълник с два върха върху ***n***-ъгълника. Стремим се да получим вписан триъгълник чрез преместване на единия от тези върхове.

Но да не изпреварваме събитията! За да почувстваме по-добре процеса на създаване на динамична конструкция, която после може лесно да се обобщава, естествено е да започнем с най-простия случай (***n*=3)** и да продължим с един вид *ръчно направен модел:*

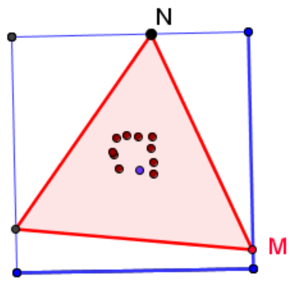
- Избираме две произволни различни точки M и N от контура на дадения (синия) триъгълник.
- Построяваме равностранен (червения) триъгълник със страна MN (няма значение кой от двата)
- движим точка **N** (запазвайки текущата позиция на точка **M)** така, че червеният триъгълник да се впише в синия. Центърът на червения триъгълник е точка от търсеното геометрично място.
- Повтаряме процеса за нова позиция на точка **M.**



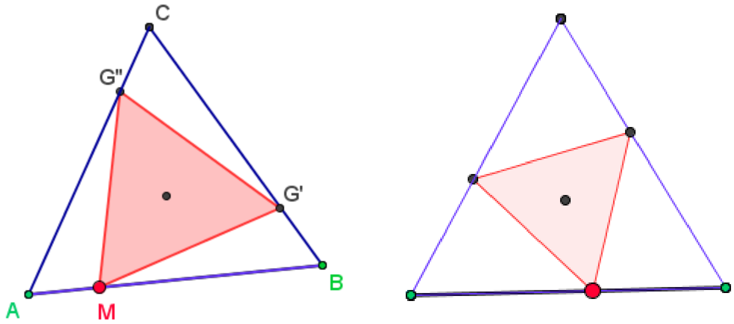
(3;3) ръчен модел (html ggb)

Така, използвайки резултатите за отделни позиции на точка **M**, можем да се ориентираме затърсеното геометрично място от точки. За случай **(3;3)** центровете като че ли съвпадат (или може би се доближават помежду си) ....

Ако приложим същата процедура за случай **(3;4)** центровете изглеждат разположени върху квадрат. Но вписването на триъгълник с нагласяване *на ръка* е времеемко. (Все пак малко по-лесно от построяването на лист хартия и разглеждането на конкретен частен случай, който може да ни подведе поради неточност.)



За да стигнем до автоматизиране на конструкция, нека разгледаме внимателно модела за **(3;3)**. Наблюдението ни дава основание да формулираме хипотеза, че в този случай търсеното геометрично място е точка, която съвпада с центъра на дадения триъгълник.



2.2 Автоматизиран динамичен модел (3;3) на конструкция

Ето няколко начина за създаване на автоматизиран модел **(3;3)** на конструкция (**html ggb**):

Първи начин

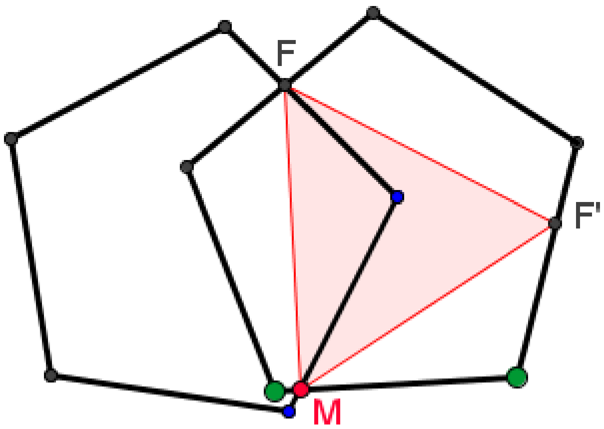
- Построяваме точка **M** върху контура на правилен триъгълник.
- Построяваме окръжност ***k*** с център **B** и радиус **AM**
- Означаваме с **G'** пресечната точка на ***k*** със страната **BC** на ***n***-ъгълника (в случая на триъгълник **ABC**)
- Аналогично построяваме **G''**
- Свързваме точките **M, G'** и **G''** в триъгълник.

Втори начин

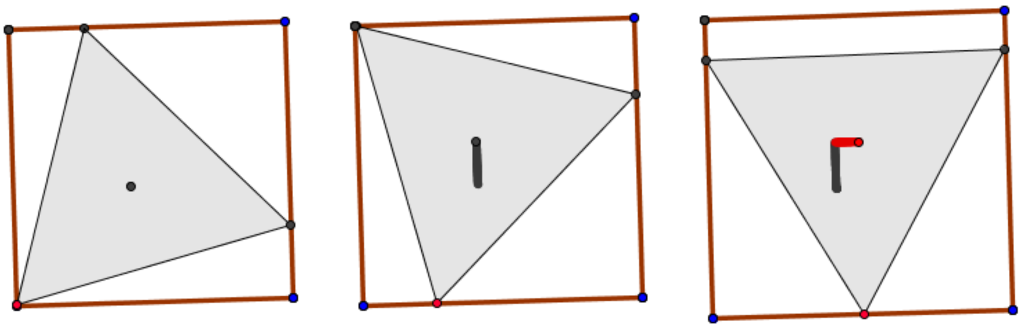
- Построяваме точка **M** върху контура на правилен триъгълник `
- Намираме образа **G'** на **M** при ротация с център – центъра на дадения триъгълник и ъгъл 120^{o}
- Намираме образа **G''** на **G'** при ротация с център – центъра на дадения триъгълник и ъгъл 120^{o}
- Свързваме точките **M, G'** и **G''** в триъгълник

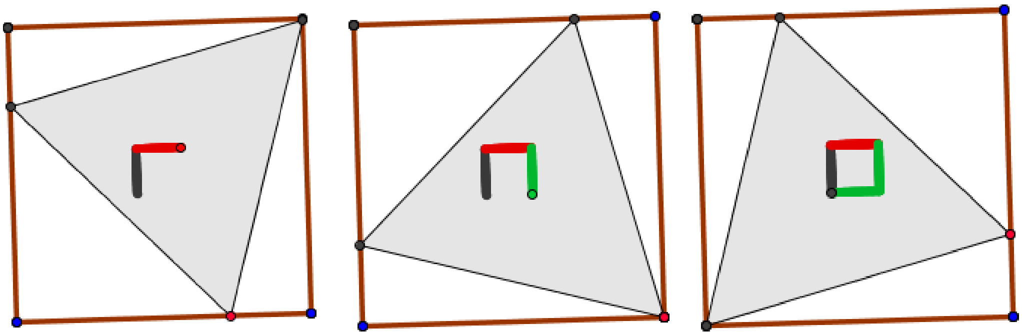
2.3 Още динамични модели

- Построяваме точка **M** върху контура на правилен триъгълник.
- Намираме образа на ***n***-ъгълника при ротация **ρ** с център **M** и ъгъл 60^{o}.
- Означаваме пресечната точка на двата ***n***-ъгълника с **F.** (Тя ще е връх на правилния триъгълник с връх **M**, който е вписан в ***n***-ъгълника.)
- Намираме първообраза **F'** на **F**.
- Свързваме точките **M**, **F'** и **F** и получаваме правилен триъгълник, вписан в ***n***-ъгълника.



Ето няколко *моментни снимки* на следата на центъра на триъгълника в **(3;4)** конструкция (**html** **ggb**), получени при движението на червената точка по контура на вписания триъгълник:

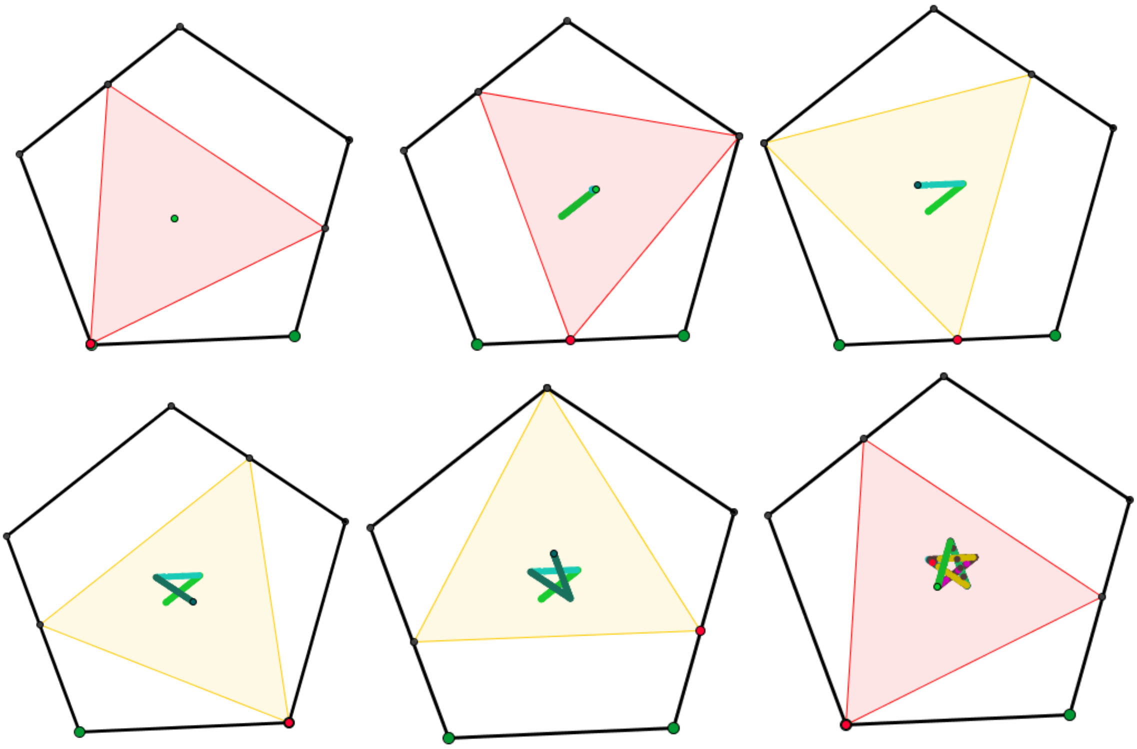




Когато движим червената точка (**М**), докато следващият връх на триъгълника съвпадне с връх на квадрата, забелязваме, че следата придобива формата на половин квадрат. Аналогично, когато движим точката **М** по останалите страни на квадрата, центърът на триъгълника оставя следа, която допълва началната Г-образна форма до квадрат, след което започва да обикаля квадрата (колко пъти?).

Като имаме предвид, че разглежданото геометрично място на точки в **(3;4)** конструкция е квадрат, да направим предположение за съответното геометрично място на точки в конструкция **(3;5)** (**html** **ggb**). Логично е да очакваме, че ще се получи правилен петоъгълник.

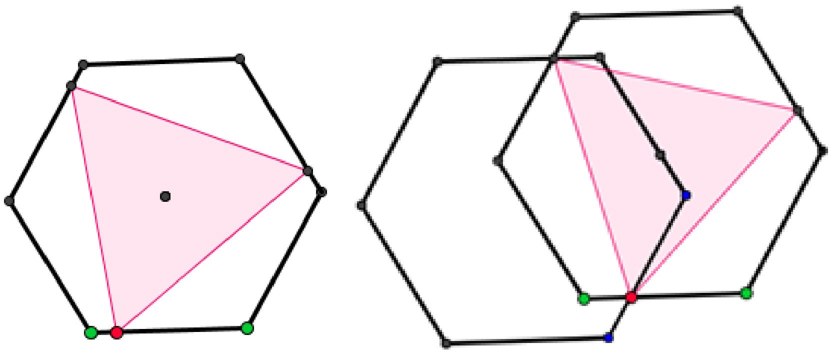
Достатъчно е (нали се сещате защо?) да наблюдаваме резултата при движението на червената точка само върху част от петоъгълника.



А-ха! Пак 5 страни, но не изглежда като петоъгълник, а като пентаграм! Излиза, че можем да разглеждаме квадрата като „4-лъчка“...

Отново, центърът на триъгълника описва три пъти геометричното място на точки, докато червената точка прави пълна обиколка на дадения петоъгълник.

В случая **(3;6)** геометричното място на точки е точка (**html** **ggb**):



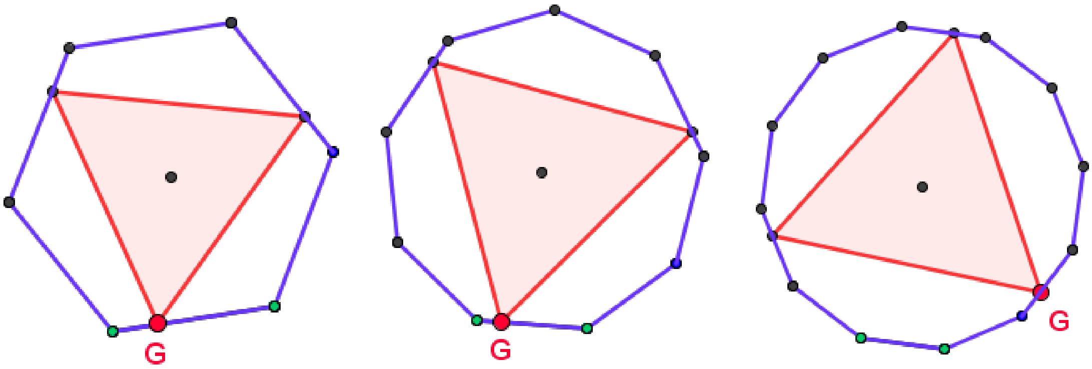
Така беше и в случая **(3;3)** (**html** **[ggb](ggb)**). По аналогия можем да направим предположение, че това е в сила за **(3;9)** и по-общо – за **(3;3*k*)**. Можем да направим самостоятелно изследване за **(*m*;*km*)**.

2.4 Още изследвания, които ни носят прозрение

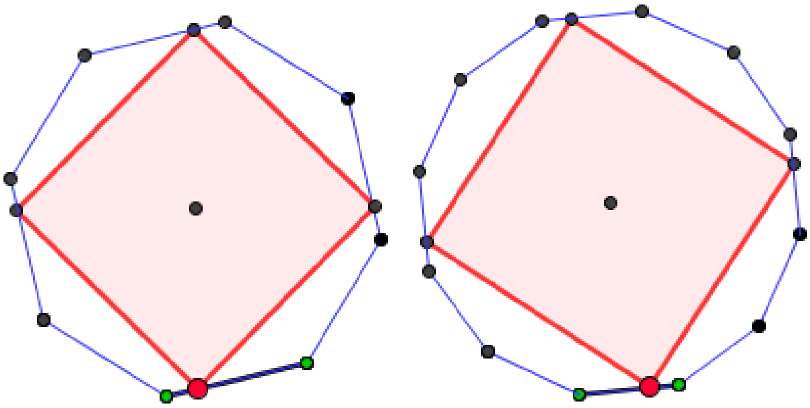
Модел (*m*; *km*)

Изкушени сме да изследваме

(3;3k**)**
(html ggb)

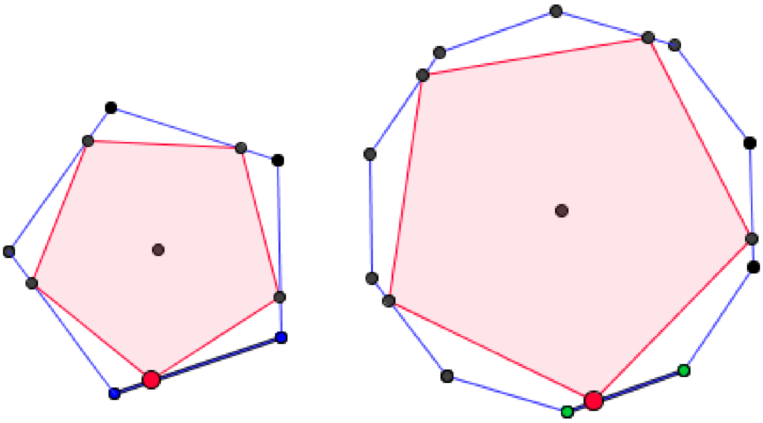


(4;4*k*)
(html ggb)



(5;5*k*)

(html ggb)



Преди да продължите да четете, опитайте се да формулирате обобщение на изследваните по-горе случаи за конструкцията **(*m*;*km*)**.

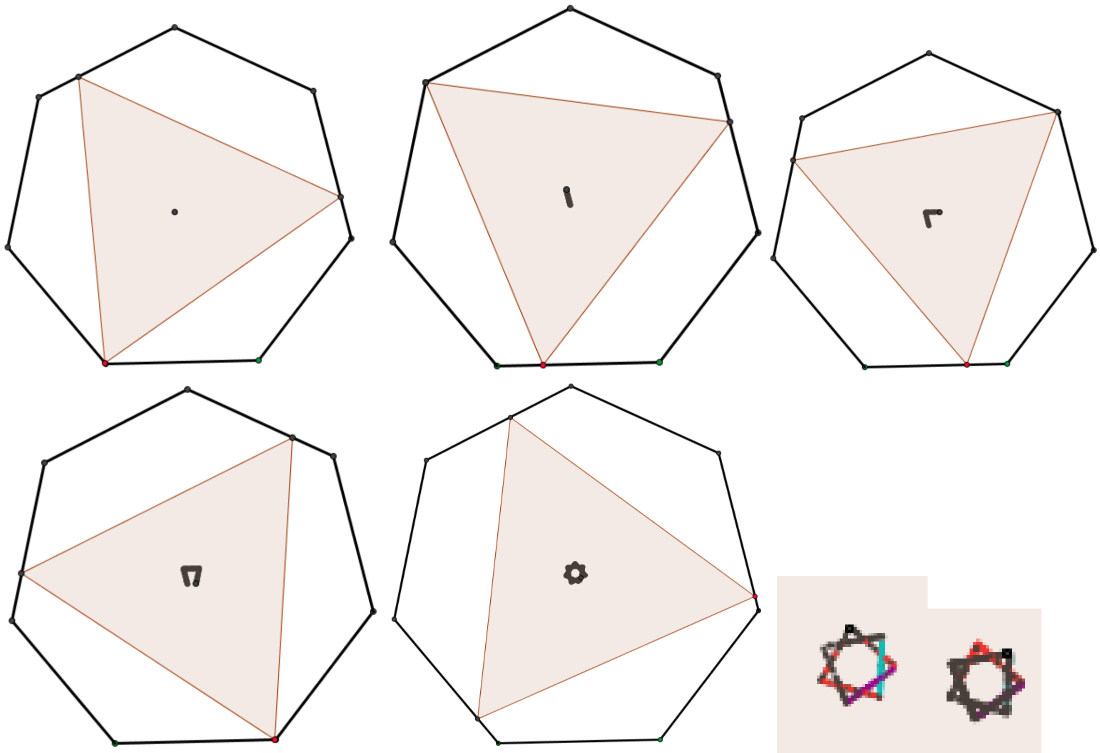
Сигурно, сте стигнали до хипотезата, че *за всяка точка **G** върху правилен **n**-ъгълник (**n**=**km**) съществува вписан правилен **m**-ъгълник с връх **G** и въпросното геометрично място е единствена точка, съвпадаща с центъра на **n**-ъгълника.*

Конструкция **(*m*;*km*)** може да се постигне с построяване по аналогичен на **втория начин** (виж по-горе).

Да продължим изследването на модел (**3;*n***).

Модел (3;7) (html ggb)

Сега очакваме звезда, която ще се генерира от елемент, получен при придвижването по една от страните на седмоъгълника.

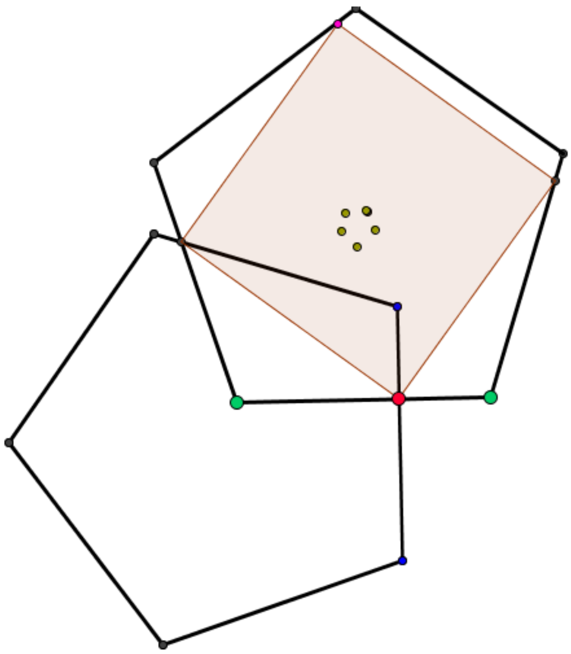


Изследването с модел (**3;*n***) води до предположението, че във всеки правилен ***n***-ъгълник може да се впише правилен триъгълник. С други думи, моделът (**3;*n***) за изследване е всъщност конструкция (**3;*n***).

Интересно е да видим каква е ситуацията в случая с модел (**4;*n***)...

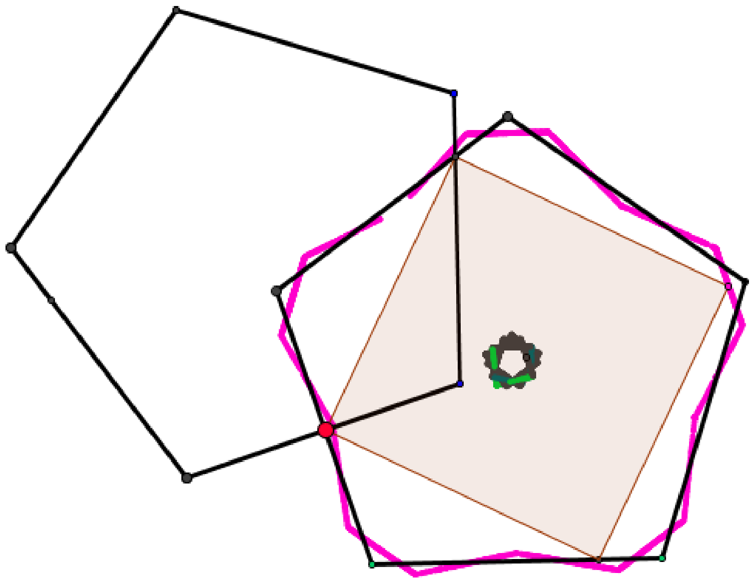
Модел (4;5) (**html** **ggb**)

Ето резултатът от изследването за квадрат, вписан в правилен петоъгълник:

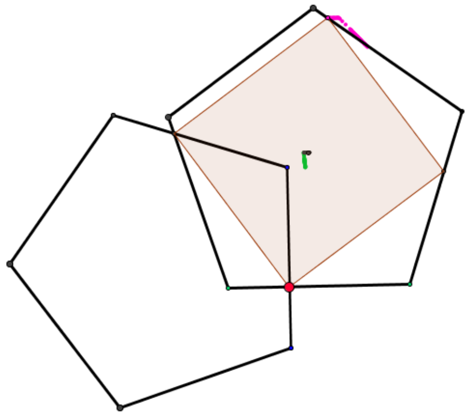
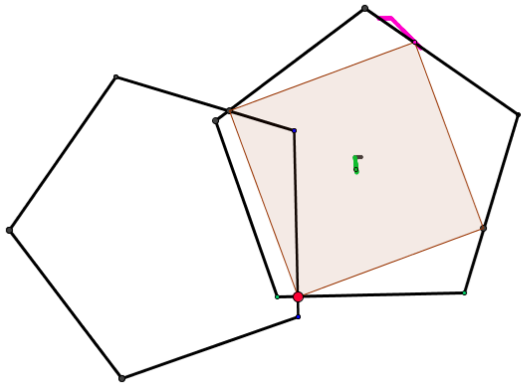


Тук отново *n*-ъгълникът (петоъгълникът в този частен случай) и неговият образ при съответната ротация на 90^{o} имат една пресечна точка, чийто прообраз е трети връх на квадрата. Остава да наблюдаваме кога четвъртият връх на квадрата ще лежи на контура на дадения петоъгълник.

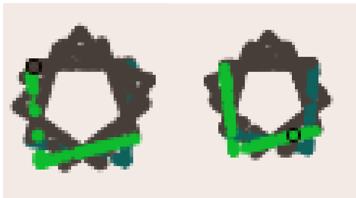
Тук четвъртият връх е в лилав цвят, в режим на оставяне на следа (*trace mode*) (**html** **ggb**):



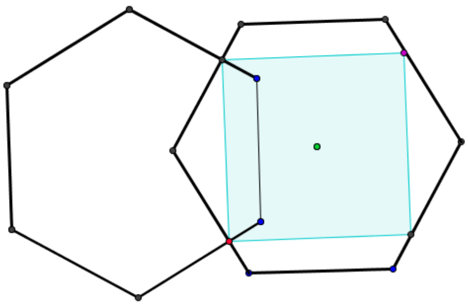
Долу са показани още няколко позиции за регистриране на вписан квадрат:

Да видим по-добре геометричното място на центровете на тези квадрати, които са с три върха върху *n*-ъгълник.



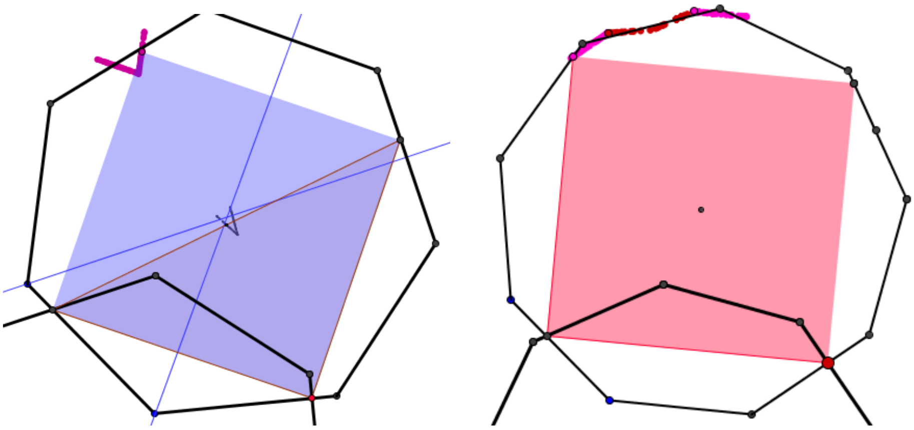
Модел (4;6) **(html ggb)**



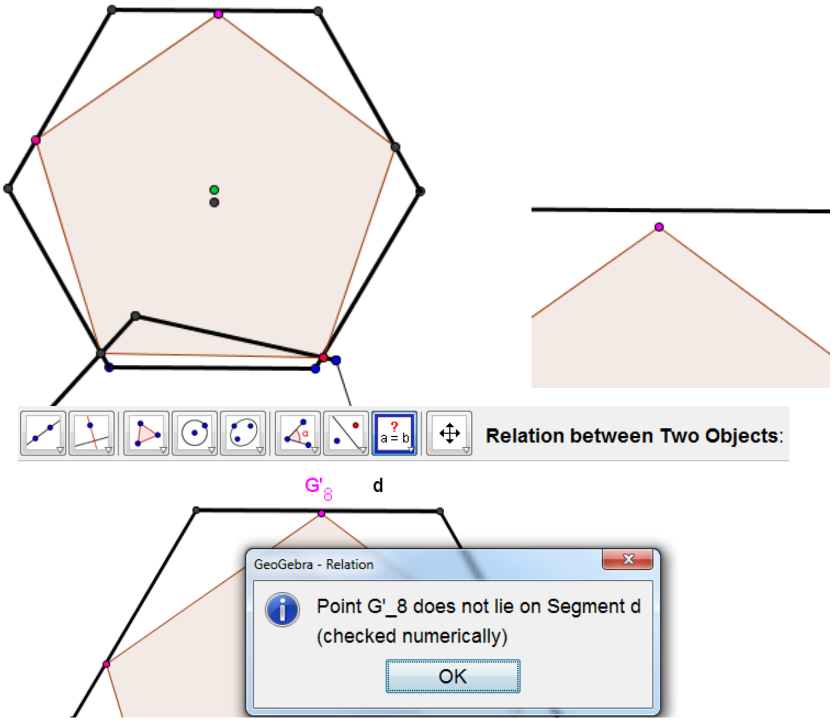
Геометричното място на точки е отново точка в случая (***m, mk***), като разликата сега е, че е получено като геометрично място на центровете на **краен брой** вписани квадрати.

В този момент е добра идея да се опитаме да предвидим от колко точки се състои геометричното място на точки в случаи като **(4;7)** и **(4;9)**. Можем да си помогнем експериментално с

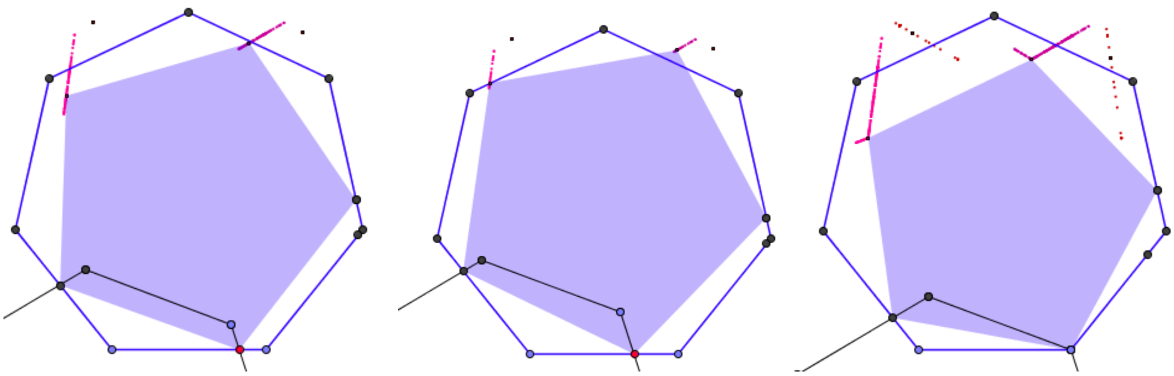
Модели (4;7) и (4;9)

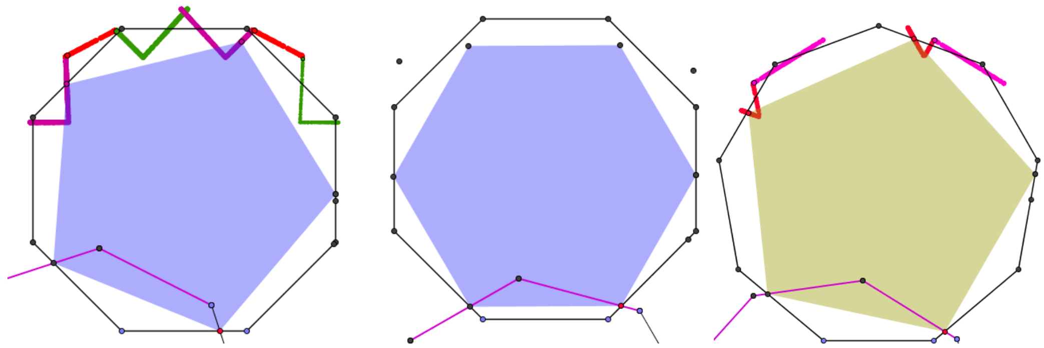


В модел **(5;6)** (**html** **[ggb](ggb)**) на пръв поглед изглежда, че петият връх е върху шестоъгълника. Можем да проверим експериментално, като мащабираме екрана или като проверим дали двата обекта са инцидентни. Дори след положителен отговор обаче не трябва да забравяме, че компютърът работи с известна точност.



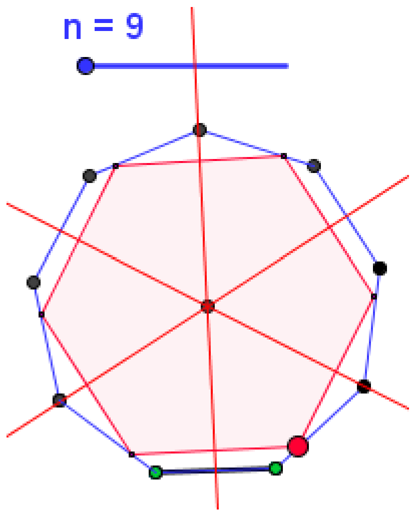
Долу са показани конкретни положения от експериментиране с динамични модели. Те ни водят до предположение кои конструкции (***m, n***) са невъзможни.

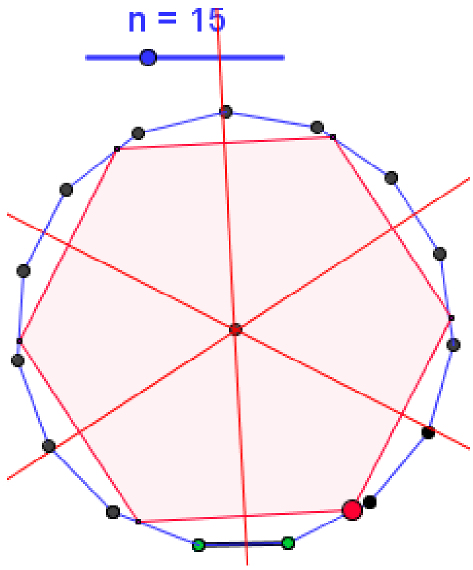




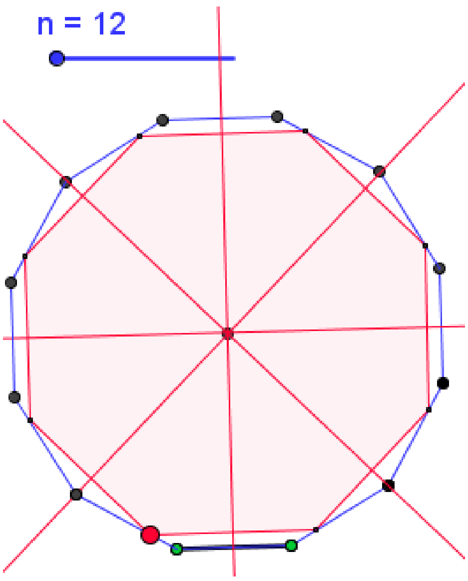
Все пак, няколко специални случая имат решение, като можем и да ги обобщим:

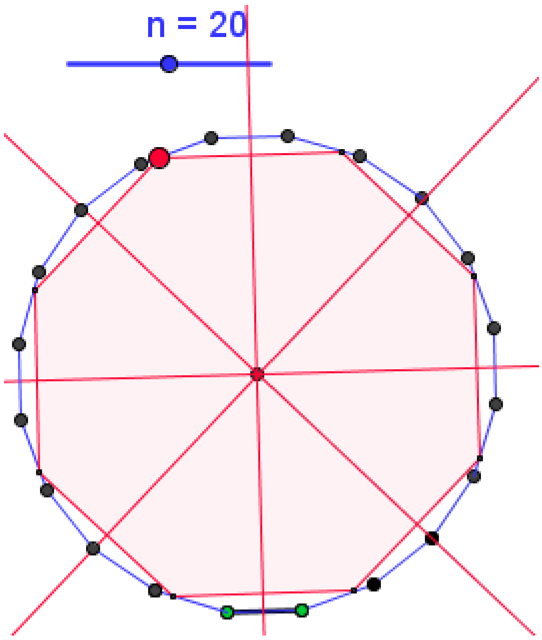
(6;3+6k) (html ggb)





(8;4+8k) (html ggb)





Забележете осите на симетрия на отсечките в конструкциите. За четно $\mathbf{m}$ конструкцията $\left(\mathbf{m};\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{2}}+\mathbf{km}\right)$ е възможна.

В този момент решихме да спрем и да се огледаме – какво разбрахме в процеса на нашето изследване? Работили ли са и други по този проблем? Въведохме магическата фраза *a regular m-gon inscribed in a regular n-gon* (на английски език шансовете засега са по-големи) и попаднахме на статия с почти същото заглавие [1]. В нея авторите използват същото означение. Това показва колко естествено е то (със своята простота и компактност) за изследване на различни случаи и описание на възникналите хипотези и резултати. В статията са представени необходими и достатъчни условия за вписването на правилен ***m***-ъгълник в правилен ***n***-ъгълник. Интересно е да отбележим, че когато са формулирали задачата, авторите (според собствените им думи) *наивно са очаквали тя да е решена още по времето на Евклид, но се оказало, че все още не е напълно решена*. Ето какво доказват те с помощта на комплексни числа:

Теорема. *Да допуснем, че $m, n \geq 3$. Един правилен m-ъгълник може да бъде вписан в правилен n-ъгълник тогава и само тогава, когато са изпълнени следните взаимно изключващи се условия:*

(a) $m = 3$;

(b) $m = 4$;

(c) $m \geq 5$ *и m дели n;*

(d) $m \geq 6$ е четно и *n е нечетно кратно на* $m/2$ (това включва случая $n = m/2$).

Оказва се, че последните примери в нашите изследвания принадлежат на (d).

Ако бяхме видели тази статия, преди да атакуваме задачата с динамични средства, едва ли бихме се осмелили да я предложим на ученици (дори да са сериозно мотивирани да изследват нови математически територии). Самите изследвания обаче се опират на математически умения, достъпни за ученици, които познават геометричните трансформации. Нещо повече, закономерностите и отношенията, открити по време на изследователския процес, дават импулс за формулирането на нови интересни въпроси.

Това, което наистина ни се струва важно в контекста на тази задача, дори не е самото решение, а целият процес на създаване на подходяща платформа за изследвания, засилването на интуицията ни и откриването на закономерности, свързани с различните конструкции, проектирането на по-систематичен подход към експериментите, осъзнаването, че не всички комбинации от естествени числа (***m, n***) могат да генерират конструкция от вписан правилен ***m***-ъгълник в правилен ***n***-ъгълник, и накрая – вярата, че учителите са способни да внедрят изследователския подход в математическото образование. С една реч – да илюстрираме шеговития стих на големия датски математик, архитект и поет Пийт Хайн:

Problems worthy of attack, prove their worth by hitting back.

В свободен превод: *Задачите така ни завладяват, добре ако се те съпротивляват…*

БЛАГОДАРНОСТИ

Изразяваме дълбоката си признателност към член кор. Олег Мушкаров за формулирането на общия проблем и за полезните коментари.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Dilworth S. J., S. R. Mane. *Inscribing a regular m-gon in a regular n-gon* http://www.math.sc.edu/~dilworth/preprints_files/DilworthManeJOGpublished.pdf (October 25, 2011)

[2] *Grooks*, http://www.archimedes-lab.org/grooks.html (October 25, 2011)

ДИНАМИЧНИ ФАЙЛОВЕ

Създадените за изследването на задачите динамични файлове са качени във виртуален кабинет по математика, създаден в ИМИ:

www.math.bas.bg/omi/cabinet/

Ето и техните адреси:

http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/html/d18301.html

http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/html/d18302.html

http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/html/d18303.html

http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/html/d18304.html

http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/html/d18305.html

http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/html/d18306.html

http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/html/d18307.html

http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/html/d18308.html

http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/html/d18309.html

http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/html/d18310.html

http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/html/d18312.html

http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/html/d18313.html

http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/html/d18314.html

http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/html/d18315.html

http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/html/d18316.html

http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/html/d18317.html

http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/html/d18318.html

http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/html/d18319.html

http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/html/d18321.html

http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/html/d18325.html

http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/html/d18326.html

http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/ggb/d18301.ggb

http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/ggb/d18302.ggb

http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/ggb/d18303.ggb

http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/ggb/d18304.ggb

http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/ggb/d18305.ggb

http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/ggb/d18306.ggb

http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/ggb/d18307.ggb

http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/ggb/d18308.ggb

http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/ggb/d18309.ggb
http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/ggb/d18310.ggb
http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/ggb/d18312.ggb
http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/ggb/d18313.ggb
http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/ggb/d18314.ggb
http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/ggb/d18315.ggb
http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/ggb/d18316.ggb
http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/ggb/d18317.ggb
http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/ggb/d18318.ggb
http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/ggb/d18319.ggb
http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/ggb/d18321.ggb
http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/ggb/d18325.ggb
http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/ggb/d18326.ggb