БРОЕНЕ С ЕДНАКВОСТИ

Доц. Ивайло Кортезов, ИМИ-БАН

A1. Всяка плочка на домино има две числа от 1 до n. Две плочки се считат за еднакви, ако едната може да се получи от другата с размяна на числата. Колко са различните плочки?

A2. Ели прави плодови шишчета; на всяко шишче тя нанизва $2n$ парчета от два вида (диня или пъпеш). Две шишчета се считат за еднакви, ако едното се получава от другото с обръщане. Колко са всички различни шишчета?

Лема на Коши-Фробениус:
Броят N на различните обекти е средното аритметично на всички $\lvert\mathrm{Fix}(g)\rvert$ за $g \in G$.

Факт. Броят $|G|$ на всички еднаквости е равен на $|\mathrm{Orb}(x)|\,.\,|\mathrm{St}(x)|$ за всяко $x \in X$.

A3. Ели прави плодови шишчета: на всяко шишче нанизва $2n-1$ парчета от два вида (диня или пъпеш). Две шишчета се считат за еднакви, ако едното се получава от другото с обръщане. Колко са всички различни шишчета?

A4. Ели прави плодови шишчета; на всяко шишче тя нанизва $2n$ парчета от три вида. Две шишчета се считат за еднакви, ако едното се получава от другото с обръщане. Колко са всички различни шишчета?

A5. Ели прави плодови шишчета: на всяко шишче нанизва $2n-1$ парчета от три вида. Две шишчета се считат за еднакви, ако едното се получава от другото с обръщане. Колко са всички различни шишчета?

A6. Билет с форма на правоъгълник може да бъде перфориран на $3\times3=9$ възможни места. Две перфорации се считат за еднакви, ако едната се получава от другата с обръщане на билета около дългата му ос. Колко са всички възможни перфорации с поне една дупка?

A7. Таблица $2\times n$ (т.е. с 2 реда и n стълба), съставена от разноцветни квадратчета, трябва да се разреже на n плочки 2×1. Докажете, че броят на различните начини за това е равен на $n+1$-вото число f_{n+1} в редицата на Фибоначи.

A8. По колко различни начина можем да покрием таблица 2×5 с 5 плочки 2×1, ако ротациите и отраженията се считат за еднакви?

A9. По колко различни начина можем да покрием таблица 2×7 със 7 плочки 2×1, ако ротациите и отраженията се считат за еднакви?

A10. По колко различни начина можем да покрием таблица 2×9 с 9 плочки 2×1, ако ротациите и отраженията се считат за еднакви?

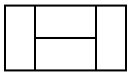
A11. По колко различни начина можем да покрием таблица $2\times(2n-1)$ с $2n-1$ плочки 2×1, ако ротациите и отраженията се считат за еднакви?

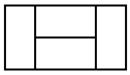
A12. По колко различни начина можем да покрием таблица 2×4 с 4 плочки 2×1, ако ротациите и отраженията се считат за еднакви?

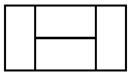
A13. По колко различни начина можем да покрием таблица 2×6 с 6 плочки 2×1, ако ротациите и отраженията се считат за еднакви?

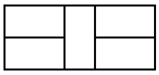
A14. По колко различни начина можем да покрием таблица 2×8 с 8 плочки 2×1, ако ротациите и отраженията се считат за еднакви?

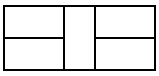
A15. Нека $n \geq 2$. По колко различни начина можем да покрием таблица $2\times 2n$ с $2n$ плочки 2×1, ако ротациите и отраженията се считат за еднакви?

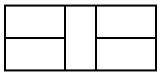
B1. По колко различни начина можем да оцветим полетата на таблицата  в бяло и черно, ако ротациите и отраженията се считат за еднакви?

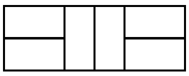
B2. По колко различни начина можем да оцветим полетата на таблицата  в бяло, зелено и червено, ако ротациите и отраженията се считат за еднакви?

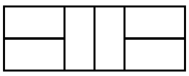
B3. По колко различни начина можем да оцветим полетата на таблицата  при палитра от a цвята, ако ротациите и отраженията се считат за еднакви?

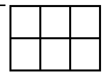
B4. По колко различни начина можем да оцветим полетата на таблицата  в бяло и черно, ако ротациите и отраженията се считат за еднакви?

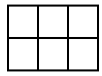
B5. По колко различни начина можем да оцветим полетата на таблицата  в бяло, зелено и червено, ако ротациите и отраженията се считат за еднакви?

B6. По колко различни начина можем да оцветим полетата на таблицата  при палитра от a цвята, ако ротациите и отраженията се считат за еднакви?

B7. По колко различни начина можем да оцветим полетата на таблицата  в бяло и черно, ако ротациите и отраженията се считат за еднакви?

B8. По колко различни начина можем да оцветим полетата на таблицата  при палитра от a цвята, ако ротациите и отраженията се считат за еднакви?

B9. По колко различни начина можем да оцветим полетата на таблицата  в бяло и черно, ако ротациите и отраженията се считат за еднакви?

B10. По колко различни начина можем да оцветим полетата на таблицата  при палитра от a цвята, ако ротациите и отраженията се считат за еднакви?

B11. От седем еднакво дълги клечки трябва да се образува правоъгълник, разделен на два квадрата. По колко различни начина може да изглежда той, ако всяка от клечките може да е оцветена в един от a дадени цвята, а ротациите и отраженията се считат за еднакви?

B12. Имам 7 еднакво дълги клечки: жълта, синя, зелена и 4 бели. Трябва да образувам правоъгълник, разделен на два квадрата. По колко различни начина може да изглежда той, ако ротациите и отраженията се считат за еднакви?

Две <u>огърлици</u> се считат за еднакви, ако едната може да се получи от другата със завъртане, но не и ако се налага да се обърне обратно. Две <u>гривни</u> се считат за еднакви, ако едната може да се получи от другата със завъртане или с обръщане.

C1. Колко са всички огърлици с 3 мъниста, ако всяко е лилаво, розово или бяло?

C2. Колко са всички гривни с 3 мъниста, ако всяко е лилаво, розово или бяло?

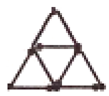
C3. Колко са огърлиците с 3 мъниста, ако всяко е синьо, зелено, жълто или червено?

C4. Колко са всички огърлици с 3 мъниста, ако за всяко има по a разрешени цвята?

C5.[(AMC16)] От три еднакво дълги клечки е съставен равностранен триъгълник. По колко различни начина може да изглежда той, ако всяка клечка може да е в един от пет дадени цвята? Триъгълниците, получавани със завъртане или обръщане, са еднакви.

C6. Колко са всички гривни с 3 мъниста, ако за всяко има по a разрешени цвята?

C7. От девет еднакво дълги клечки е съставен равностранен триъгълник, разделен на 4 триъгълника, както е показано на чертежа. По колко различни начина може да изглежда той, ако всяка клечка може да е синя или жълта? Триъгълниците, които се получават със завъртане, се считат за еднакви, но не и ако е нужно обръщане.



C8. От девет еднакво дълги клечки е съставен равностранен триъгълник, разделен на 4 триъгълника. По колко различни начина може да изглежда той, ако за всяка клечка има по a разрешени цвята? Триъгълниците, които се получават със завъртане, се считат за еднакви, но не и ако е нужно обръщане.

C9. От девет еднакво дълги клечки е съставен равностранен триъгълник, разделен на 4 триъгълника. По колко различни начина може да изглежда той, ако всяка клечка може да е синя, червена или жълта? Триъгълниците, които се получават със завъртане, се считат за еднакви, но не и ако е нужно обръщане.

С10. От девет разноцветни клечки с еднаква дължина е съставен равностранен триъгълник, разделен на 4 триъгълника. По колко различни начина може да изглежда той? Триъгълниците, които се получават със завъртане, се считат за еднакви, но не и ако е нужно обръщане.

С11. От девет еднакво дълги клечки е съставен равностранен триъгълник, разделен на 4 триъгълника. По колко различни начина може да изглежда той, ако всяка клечка може да е синя или жълта? Триъгълниците, които се получават със завъртане или обръщане, са еднакви.

С12. На чертежа от 9 еднакво дълги клечки е съставен равностранен триъгълник, разделен на 4 триъгълника. По колко различни начина може да изглежда той, ако за всяка клечка има по *a* разрешени цвята? Триъгълниците, които се получават със завъртане или обръщане, са еднакви.

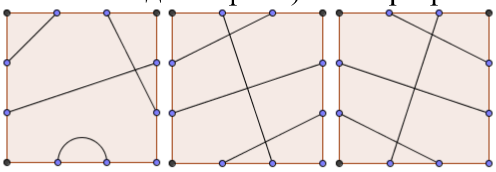
С13. От 9 еднакво дълги клечки е съставен равностранен триъгълник, разделен на 4 по-малки. По колко различни начина може да изглежда той, ако всяка клечка може да е синя, зелена или жълта? Триъгълниците, които се получават със завъртане или обръщане, са еднакви.

С14. От девет разноцветни клечки с еднаква дължина е съставен равностранен триъгълник, разделен на 4 триъгълника, както е показано на чертежа. По колко различни начина може да изглежда той? Триъгълниците, които се получават със завъртане или обръщане, се считат за еднакви.

С15. Колко са всички огърлици с 4 мъниста, ако всяко е розово или бяло?

С16. Колко са всички огърлици с 4 мъниста, ако всяко е лилаво, розово или бяло?

С17. В играта *Церо* всяка страна на квадрат е разделена на три равни части. Осемте точки на деление са свързани по двойки с отсечки (ще поставяме обърнати навътре полуокръжности, ако точките са на една страна). Ето три различни свързвания:



Две свързвания са еднакви, ако едното се получава от другото при завъртане, но не и ако е нужно отражение (като при последните два примера горе). Колко са всички възможни свързвания?

С18. Колко са всички таблици 3×3, в които всяко поле е бяло или черно? Две таблици се считат за еднакви, ако се получават една от друга със завъртане, но не с обръщане.

С19. Колко са всички таблици 3×3, в които всяко поле е бяло, зелено или червено? Две таблици се считат за еднакви, ако се получават една от друга със завъртане, но не с обръщане.

C20. Колко са всички таблици 3×3, чиито полèта са оцветени при палитра от *a* цвята? Две таблици се считат за еднакви, ако се получават една от друга със завъртане, но не с обръщане.

C21. Колко са всички гривни с 4 мъниста, ако всяко е розово или бяло?

C22. Колко са всички гривни с 4 мъниста, ако всяко е лилаво, розово или бяло?

C23. Колко са всички огърлици с 4 мъниста, ако всяко е синьо, зелено, жълто или червено?

C24. Колко са всички огърлици с 4 мъниста, ако за всяко има по *a* разрешени цвята?

C25. Колко са всички гривни с 4 мъниста, ако за всяко има по *a* разрешени цвята?

C26. Кръг е разделен на 5 еднакви сектора. Всеки от тях може да се оцвети в бяло или черно. По колко начина може да стане това? (Кръговете се считат за еднакви, ако се получават със завъртане.)

C27. Колко са всички огърлици с 5 мъниста, ако всяко е лилаво, розово или бяло?

C28. Колко са всички гривни с 5 мъниста, ако всяко е лилаво, розово или бяло?

C29. Колко са всички огърлици с 5 мъниста, ако всяко е синьо, зелено, жълто или червено?

C30. Колко са всички огърлици с 5 мъниста, ако за всяко има по *a* разрешени цвята?

C31. Колко са всички гривни с 5 мъниста, ако за всяко има по *a* разрешени цвята?

C32. Кръг е разделен на 6 еднакви сектора. Всеки от тях може да се оцвети в бяло или черно. По колко начина може да стане това? (Кръговете се считат за еднакви, ако се получават със завъртане, но не и ако е нужно обръщане.)

C33. Кръг е разделен на 6 еднакви сектора. Всеки от тях може да се оцвети в бяло или черно. По колко начина може да стане това? (Кръговете се считат за еднакви, ако се получават със завъртане или с обръщане.)

C34. Колко са всички огърлици с 6 мъниста, ако всяко е лилаво, розово или бяло?

C35. Колко са всички гривни с 6 мъниста, ако всяко е лилаво, розово или бяло?

C36. Колко са всички огърлици с 6 мъниста, ако всяко е синьо, зелено, жълто или червено?

C37. Колко са всички огърлици с 6 мъниста, ако за всяко има по *a* разрешени цвята?

C38. Колко са всички гривни с 6 мъниста, ако за всяко има по *a* разрешени цвята?

C39. Колко са всички огърлици, съставени от 3 розови и 3 бèли мъниста?

C40. Колко са всички огърлици, съставени от 4 розови и 3 бèли мъниста?

C41. Колко са всички огърлици, съставени от 5 розови и 3 бèли мъниста?

C42. Колко са всички огърлици, съставени от 6 розови и 3 бѐли мъниста?

C43. Колко са всички огърлици, съставени от 2 розови, 2 лилави и 2 бѐли мъниста?

C44. Колко са всички огърлици, съставени от 3 розови, 2 лилави и 2 бѐли мъниста?

C45. Колко са всички огърлици, съставени от 4 розови, 2 лилави и 2 бѐли мъниста?

C46. Колко са всички огърлици, съставени от 5 розови, 2 лилави и 2 бѐли мъниста?

C47. Нека p е просто число. Колко са всички огърлици с p мъниста, ако за всяко има по a разрешени цвята?

C48. Докажете, че ако p е просто, а a е естествено число, то a^p и a дават еднакъв остатък при деление на p (Теорема на Ферма).

C49. Нека p е нечетно просто число. Колко са всички гривни с p мъниста, ако за всяко има по a разрешени цвята?

C50. Колко са всички гривни със 7 мъниста от 2 възможни цвята?

C51. Нека n е цяло. По колко различни начина можем да направим кръгло хоро от n налични хора?

C52. Нека $n \geq 3$ е цяло. По колко различни начина можем да направим гривна от n дадени различни мъниста?

C53.[(AMC)] Разполагаме с 6 еднакво дълги клечки: две сини, две зелени и две червени. По колко различни начина можем да сглобим квадрат с 4 от клечките? (Квадрати, които се получават с обръщане и/или завъртане, се считат за еднакви.)

C54.[(30/30)] Колко са всички гривни със 7 мъниста, ако всяко мънисто може да е червено, бяло, розово, оранжево или лилаво?