Петър Кендеров Тони Чехларова

ПОДГОТОВКА ЗА СЪСТЕЗАНИЯ ПО МАТЕМАТИКА С КОМПЮТЪР В 9. – 10. КЛАС

(помагало за учители)

2020 г.

Регалия 6

ISBN 978-954-745-321-0

Petar Kenderov **Toni Chehlarova**

Institute of Mathematics and Informatics

Bulgarian Academy of Sciences

PREPARATION FOR COMPETITIONS IN MATHEMATICS WITH COMPUTER at 9th and 10th grade

(Guide for teachers)

With the support of the “National Scientific Program “Information and Communication Technologies for a United Digital Market in Science, Education and Security” (ICT in SES)

АНОТАЦИЯ: В курса се представят виртуални учебни ресурси, които могат да се използват както при обучението по математика, така и при подготовката за онлайн състезания по математика. Самият курс се състои от: работа с готови продукти; модифицирането им с цел решаване на нови задачи; намиране на приблизителни решения (със зададена точност) на задачи, които е трудно или въобще невъзможно да се решат с традиционната училищна математика; поставяне в изследователска ситуация; съпреживяване на различни подходи и използване на интерактивни методи на обучение. Акцент се поставя и върху дейностите по участието в онлайн състезания. Специализираният математически софтуер, който се използва, е безплатен и общодостъпен (предимно системата ГеоГебра).

ЦЕЛЕВА ГРУПА: Гимназиални учители по математика, информатика, информационни технологии.

ЦЕЛИ:

- Запознаване с необходимостта от онлайн състезанието „VIVA Математика с компютър“ и с неговия регламент.
- Запознаване с дигитални ресурси за подготовка за онлайн състезание по „математика с компютър“ и методика за подготовка за успешно участие в тях.
- Формиране на знания и умения за подготовка и организиране на учебна дейност в изследователски стил чрез съчетаване на класически средства и динамични конструкции, реализирани със специализиран софтуер.
- Развитие на умения за ефективно търсене, извличане, подбор и оценка на ресурси, свързани с динамични

конструкции и ориентирани към образованието по математика.

ФОРМИ НА ОБУЧЕНИЕ:
присъствено обучение (8 часа) и дистанционно обучение (8 часа)

ИНДИКАТОРИ ЗА ОЧАКВАНИТЕ РЕЗУЛТАТИ ОТ ОБУЧЕНИЕТО:

- удовлетвореност от обучението
- прилагане на придобити умения
- участие в дейности на образователна мрежа, възникнала във връзка с провеждането на курса

ПРОДЪЛЖИТЕЛНОСТ: 16 часа

БРОЙ КВАЛИФИКАЦИОННИ КРЕДИТИ: 1

МАТЕРИАЛНО-ТЕХНИЧЕСКИ И ИНФОРМАЦИОННИ РЕСУРСИ:

- присъствено обучение: печатни материали, манипулативи, ресурси в:

http://cabinet.bg/
http://vivacognita.org/prep.html
http://course.cabinet.bg/

- дистанционно обучение: виртуална образователна среда в сайт http://course.cabinet.bg/

ЗАЩО „МАТЕМАТИКА С КОМПЮТЪР“?

Образованието по математика в училище е насочено към две различни цели. От една страна искаме математическите знания да се основават на строги, от гледна точка на логиката, дефиниции и изводи. От друга страна, искаме знанията да са приложими в практиката. Едновременното постигане в пълен обем и на двете цели, обаче, едва ли е възможно в рамките на ограничения и твърде намален хорариум по математика. Представянето на логически издържани дедуктивни разсъждения отнема много време и се възприема трудно от голяма част от учениците. Поради това, строгите разсъждения често са свързани с твърде опростено математическо съдържание, което не съответства на неизбежната сложност на реалния свят. Самото превръщане на една реална житейска ситуация в математическа задача (т.е. процесът на математическо моделиране) не се основава на логическа строгост, а на субективната преценка. Налага се да се отстранят от разглеждане някои от по-маловажните черти на реалния обект и да се оставят само най-съществените, които определят характера и свойствата на обекта. Освен това, получената в резултат на моделирането математическа задача, може да изисква за решаването си математически знания от по-високо (например университетско) равнище, които не са достъпни за учениците. Поради това се е утвърдила отдавнаща традиция, математическото моделиране и приложенията на математиката да не са застъпени в достатъчна степен в училищния курс. Така у учениците се създава погрешна представа за ролята на математиката в съвременния свят и за нейните приложения. С появата на компютрите се създават предпоставки за промяна на тази традиция. Днес съществуват мощни и широко достъпни софтуерни системи за динамична обработка на

математически обекти (СДОМО) които позволяват, поне частично, да се намали споменатото противоречие между строгостта и приложенията. Решаването на математическия модел може да се извърши със задоволителна точност с помощта на СДОМО. Това разширява значително кръга от практически задачи, които могат да се разглеждат и решават успешно в клас и в извънкласните форми за подготовка. Нещо повече, системите СДОМО позволяват значителна част от математическите знания да се усвояват на неформално ниво с помощта на експерименти. Това доближава математиката до останалите естествени науки. Провеждането на състезания от типа „математика с компютър“ е един от инструментите за използване и внедряване на тази относително нова възможност в образователния процес. През 2014 г. телекомуникационната компания VIVACOM подкрепи създаването към Института по математика и информатика на Българска академия на науките на портал vivacognita.org, чрез който се реализират различни инициативи, насочени към използването и внедряването на СДОМО в образователния процес. Част от тях са онлайн състезанията „VIVA Математика с компютър“ и „Тема на месеца“. Повече информация за тях е дадена по-долу.

АНКЕТА ЗА САМООЦЕНКА

	Преди преминава-не на курса	След премин а-ване на курса
За какво време можете да решите следната задача: За коя стойност на параметъра p системата $x^2 + y^2 = 4$ $y + p\|x - 1\| = 3$ има точно 3 решения. Запишете отговора с точност до стотните в съответната графа.	• до 10 мин • 10 мин ÷ 1 ч • 1ч ÷ 8 ч • Не се отнася за мен	• до 10 мин • 10 мин ÷ 1 ч • 1ч ÷ 8 ч • Не се отнася за мен
От всеки от ъглите на квадратен лист с размери 6×6 дециметра е изрязан и отстранен квадрат със страна $u \times u$ дециметра, където $u < 3$. Останалата част е развивка на паралелепипедна кутия без капак, с квадратно дъно и височина u. При кое u обемът на кутията ще е най-голям? Запишете предположението си в съответната графа.		
Създавали ли сте динамична конструкция със специализиран софтуер?		
Колко пъти сте провеждали изпитване на ученик с предоставяне на възможност за използване на всякакви ресурси?		
Каква е дължината на най-късата ъглополовяща на триъгълник със страни 6, 8 и 7 см? Запишете в съответната графа отговора с точност до стотни от сантиметъра.		

Задача 1.

Проучете регламента на състезание “VIVA Математика с компютър”. Запишете особености, които отличават състезание “VIVA Математика с компютър” от:

1.1. Общинския кръг на националната олимпиада по математика
1.2. Математически турнир „Иван Салабашев“
1.3. Национално външно оценяване за VII клас.

Регламент на състезание „VIVA Математика с компютър“

Състезанието „VIVA Математика с компютър“ е за ученици от трети до дванадесети клас, които са разделени в пет възрастови групи, всяка обхващаща по два последователни училищни класа. То се провежда в два кръга.

Първият кръг има две издания през учебната година – през декември и през април. Този кръг е отворен за всички желаещи да участват в него.

Вторият кръг се провежда през септември или началото на октомври и е „по покана“ – само за гимназисти, които имат високи постижения в двете издания на първи кръг и/или в състезанието „Тема на месеца“.

За участие в двете издания на първи кръг е необходима предварителна регистрация в портала http://vivacognita.org/. Всеки регистриран ученик сам избира мястото, откъдето по интернет ще участва в състезанието, както и техниката, с която ще си служи – компютър, лаптоп, таблет. В предварително определен ден и час всеки регистриран участник получава достъп за 60 минути до работен лист с десет задачи. За по-лесните задачи са предложени възможни отговори, като се очаква участникът да избере един или

няколко отговора въз основа на математически разсъждения и изчисления. За останалите задачи от участниците се очаква да въведат като отговор десетично число (обикновено с точност до стотни или хилядни). Това става в специално предназначено за целта поле за вписване на отговора. За да реши такава задача, участникът трябва да направи собствено изследване с помощта на компютър. Задачите често са съпроводени с компютърен файл (обикновено на системата *GeoGebra*), който позволява да се изследва същата или сходна задача. Участникът трябва да адаптира файла за целите на неговата задача и да намери достатъчно точен отговор. Решението се оценява според близостта му до решението, намерено от журито и/или от автора на задачата. Няма ограничение за използване на ресурси – учебници, помагала, интернет, включително помощ от приятели. Целта е участниците да са поставени в реални условия и да формират умения за използване на разнообразни ресурси, включително търсене и използване на помощ от експерт за решаване на проблеми.

Вторият кръг на състезанието е „присъствен“ – участниците са заедно – на едно място, по едно и също време. Те отново могат да използват учебници, помагала, интернет. Ограничение има по отношение на използване на човешки ресурс – всеки разчита само на себе си. Времето за работа е по-голямо в сравнение с времето за работа на първи кръг. Работният лист, до който участникът получава достъп в предварително определен час, съдържа тема от 10 задачи за съответния клас. Само част от задачите са придружени от помощен файл, в който обикновено трябва да се направят допълнителни промени, за да може да се използва за намиране на отговор на решаваната задача. За някои от задачите се очаква участникът сам да направи помощен файл за решаване на задачата.

Задача 2.

Проиграйте темите за 9 - 10 клас на състезание „VIVA Математика с компютър“ за годините 2014 – 2016, представени на симулатора на състезанието на адрес http://vivacognita.org/_/viva-math. След попълване на отговорите за всяка тема натиснете бутона „Покажи верните отговори“, за да видите дали сте решили правилно темата. Пълна колекция от всички теми (заедно с верните отговори) можете да намерите и във Виртуалния училищен кабинет по математика на адрес

http://cabinet.bg/index.php?status=pages&pageid=competitions .

Изберете една от темите за 9 – 10 клас и извършете описаните по-долу дейности, като преди това се запознаете с типовете отговори на задачите, описани по-долу.

2.1. Разделете задачите от темата според вида на отговора и запишете номера на задачата в съответната графа.

Свободен отговор	Избираем отговор, с възможност за избор на точно един от дадените	Избираем отговор, без ограничение на броя на избиране от дадените

2.2. Попълнете в таблицата номерата на задачите от проучената тема:

Задача, позната от училищния курс по математика, евентуално с „неудобни“ данни.
Задача, която може да бъде решена със знанията от училищния курс по математика за съответната възрастова група, но след сериозни усилия и за време, по-голямо от предоставеното по време на състезанието. Получаването на отговор с помощта на спомагателен файл да улеснява решаването на задачата.
Задача, която не може да бъде решена със знанията от училищния курс по математика, но с помощта на компютър да може да се получи отговор с достатъчна точност.

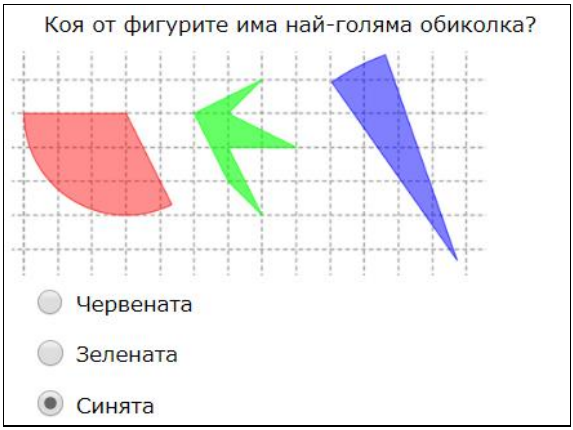
За отговорите на задачите в състезание „VIVA Математика с компютър“

Според вида на отговора задачите се разделят на три вида:

❖ Задачи с избираем отговор, с възможност за избиране на точно един отговор от *n* дадени възможности.

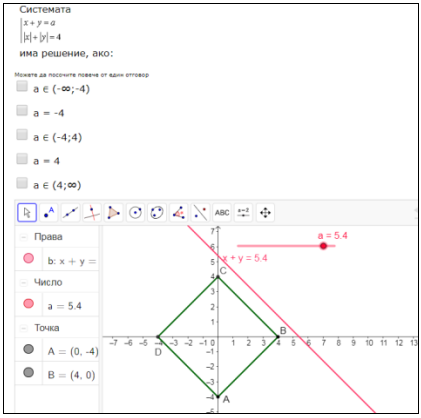
Пример:

Избираемите отговори в този случай са означени с кръгли бутони. След като се посочи отговор, съответният бутон се маркира с черна точка. При промяна на отговора автоматично предишната отметка се отстранява, т.е. остава маркиран само последно посоченият отговор.



❖ Задачи с избираем отговор, като има възможност да се изберат k отговора от n възможности, където $k < n$. Оценяването е според вярното отмятане/неотмятане на всяко от дадените предложения. За всеки посочен верен отговор и за всеки непосочен грешен отговор се дава точка. Този вид оценяване е подходящ за задачи с повече на брой решения.

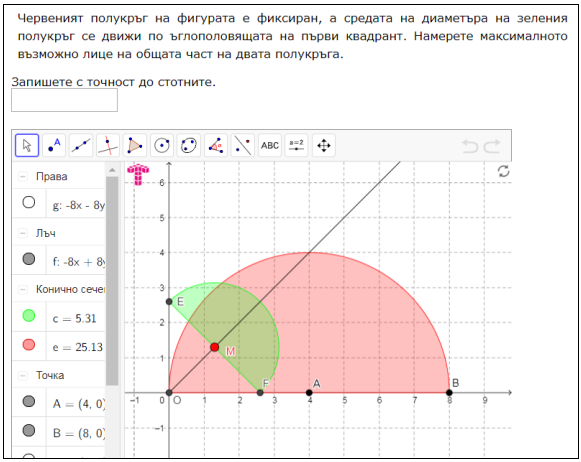
Пример:



При този вид отговори бутоните са с квадратна форма. Изписан е и текстът „Можете да посочите повече от един отговор“.

❖ Задачи с отговор, който е число в десетичен запис. Специфичен елемент е посочването на точността, с която да бъде записан отговорът. Има указание за използване на десетична точка вместо стандартната десетична запетая, но на практика се отчита и резултат, въведен с десетична запетая. Оценяването на свободните отговори е тип мишена. Максимален брой точки се получават за верен отговор. Точки се получават и когато отговорът е приблизително верен, като броят на получените точки зависи от близостта на дадения отговор до верния.

Пример:



За решаване на тези задачи е подходящо да се използват предоставените ресурси (файлове на *GeoGebra*), като обикновено трябва да се променят стойности – с плъзгач, с преместване на обект, например на точка, чрез конкретно въвеждане на стойност на параметър и др. Така неусетно се усвояват и възможностите на софтуера. Разбира се, учениците, които познават софтуерната среда, могат директно да въвеждат данни и да получават резултати. Участниците могат да използват и други изчислителни средства, за да решат задачата. Тъй като от значение при равен брой точки е времето за работа, участникът трябва да прецени с какво помощно средство ще си служи при решаване на задачата.

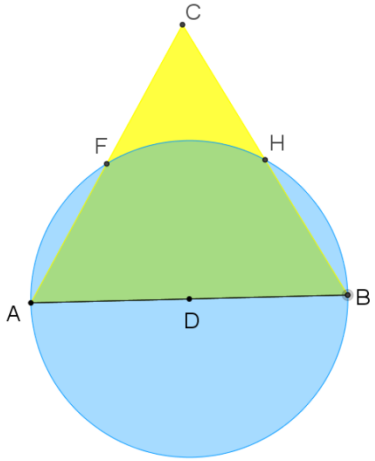
Познаването на инструментите за изчисления съкращава времето за решаване на задачи и дава възможност за организиране и провеждане на изследвания – в училище и извън него.

2.3. Посочете възможности за използване на разглежданата тема или елементи от нея с ваши ученици.

Задача 3

(Задача 8 от темата за 9 клас, декември 2015 г.)

Даден е равностранен триъгълник ABC със страна 7 см. Построен е кръг с диаметър AB. Намерете лицето на частта от триъгълника ABC, която е извън кръга (на фигурата тази част е оцветена в жълт цвят).

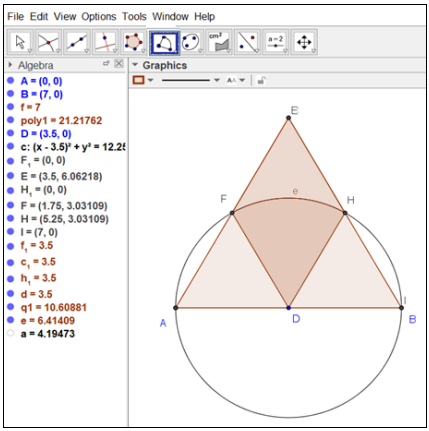


Фиг. 3.1

За решаването на задачата може да се използват предоставените в темата динамични ресурси http://course.cabinet.bg/index.php?contenttype=publicview&testidselectedbyuser=60

Задачата може да се реши и чрез използване на функционалностите на ГеоГебра за конструиране на търсената част от триъгълника. Задаваме в командния ред точките A(0,0), B(7,0) и построяваме D като среда на отсечката AB. С бутона за начертаване на правилен многоъгълник построяваме равностранния триъгълник ABC. След това с бутона построяваме окръжност с център в

т. D и радиус 3.5. Бутонът помага да намерим пресечните точки F и H на триъгълника и окръжността (Фиг.3.2).



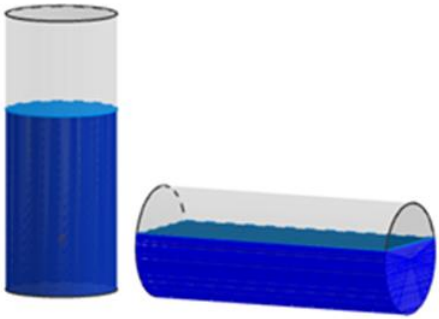
Фиг.3.2.

С активиране на бутона и избиране на точките D, H, C, F системата ГеоГебра пресмята лицето на многоъгълника DHCF и го записва в алгебричния прозорец на Фиг. 3.2. като q1 = 10.60881. Накрая, чрез бутона и избиране на точките D, H и F (в този ред – по посока обратна на часовата стрелка) системата ГеоГебра пресмята лицето на кръговия сектор DHF и го записва в алгебричния прозорец като e = 6,41409. Разликата q1 - e е точно лицето на частта от триъгълника ABC, която е извън кръга. Това лице е записано в алгебричния прозорец като a = 4.19473. Ако в условието на задачата е указано, че се очаква да въведем отговора с точност до стотни, за отговор на задачата следва да запишем числото 4.19.

Задача 4

(Подобна на задача 10 от темата за 10 клас в състезанието от декември 2015 г.)

Изправена вертикално цилиндрична консервна кутия с диаметър на основата 7 см е запълнена с течност до 2/3 от височината ѝ (Фиг. 4.1). Каква ще е височината на равнището на течността, ако сложим консервната кутия да лежи хоризонтално?

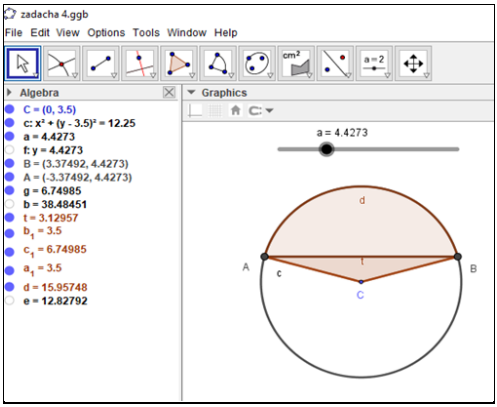


Фиг. 4.1

На пръв поглед задачата е тримерна, защото става дума за обеми: 2/3 от обема на кутията е запълнен с течност. Всъщност, задачата може да се разглежда като двумерна. В хоризонтално положение течността пак ще изпълва 2/3 от обема на кутията и, следователно, ще покрива 2/3/ от лицето на основата на кутията. Така задачата се свежда до намиране на хоризонтална хорда AB в кръг с радиус 3,5 см, над която е 1/3 от лицето на кръга (Фиг. 4.2). Разстоянието от най-долната част на кръга до хордата е решението на задачата.

Следната проста конструкция на ГеоГебра позволява да намерим това решение. Построяваме кръг с център в т. C(0, 3.5) и радиус 3.5. В алгебричния прозорец на Фиг. 4.2 кръгът е означен с буквата c , а неговото лице е записано като b =

38.48451. С бутона правим плъзгач за параметъра a с диапазон от 3.5 до 7 и прекарваме хоризонтална права f с командата $y = a$. Пресечните точки на тази права с окръжността са означени на Фиг. 4.2 с A и B.



Фиг. 4.2

С бутона за кръгов сектор изчисляваме лицето на сектора CBA. То е означено с d в алгебричния прозорец на Фиг. 4.2. С бутона изчисляваме лицето t на триъгълника ACB и пресмятаме разликата $e = d - t$, която е лицето на кръга „над течността“. Построеният по този начин файл може да бъде отворен от адрес http://cabinet.bg/img/content/151/p1112_zadacha 4.ggb . Работейки с плъзгача, намираме такава стойност за параметъра a, че e да стане приблизително равно на 12.82817 (това е 1/3 от лицето на кръга). От Фиг. 4.2 се вижда, че при a = 4.4273 получаваме e = 12.82792, което е много добро приближение на числото 12.82817. Ако отговорът на задачата следва да се даде с точност до стотните, можем да запишем като отговор числото 4.43.

Задача 5

Запишете дигитални умения, които се формират или усъвършенстват при участие в състезание по математика с компютър. Отбележете за кои от тях е необходима предварителна подготовка за вашите ученици.

Дигитални умения	Необходимост от подготовка

Основни дейности при подготовка и участие в състезание по математика с компютър, свързани с дигитална компетентност:

- регистрация
- отваряне на работния лист
- използване на готови динамични файлове
- инсталиране на софтуер
- посочване на решения (внасяне на данни)
- модифициране на предоставените динамични файлове
- търсене в интернет
- използване на електронни ресурси
- изпращане на отговорите
- споделяне

Задача 6

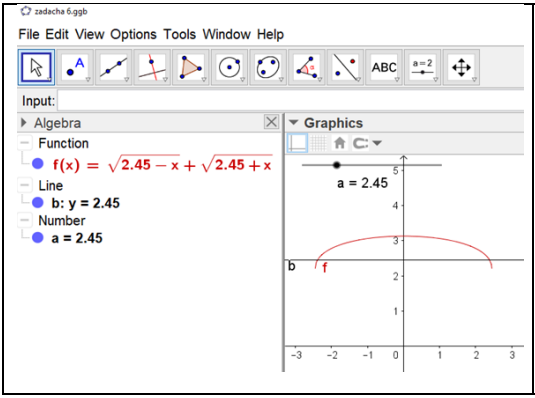
(Подобна на задача 5 от темата за 10 клас в състезанието от декември 2015 г.)

Изследвайте за кои положителни стойности на a уравнението $\sqrt{a-x} + \sqrt{a+x} = a$ има решение.

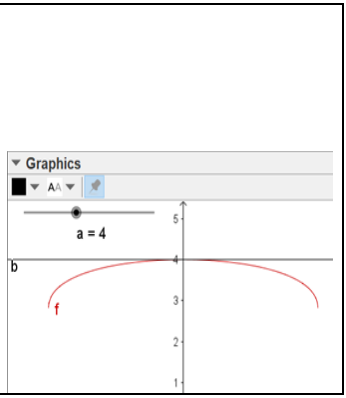
За да е коректно поставена задачата, би следвало още да се укаже изрично областта, в която се изменя променливата x. Когато тази област не е указана, по подразбиране се приема, че става дума за онези x, за които са добре дефинирани изразите в лявата част на уравнението. Т. е. подкоренните величини трябва да са неотрицателни: $a - x \geq 0$ и $a + x \geq 0$. Следователно, за всяко $a > 0$ следва да разглеждаме променливите x, за които са изпълнени неравенствата $-a \leq x \leq a$. За решаването на такъв род задачи е особено удачно да се използва ресурсът, предоставен на участниците от 10 клас в състезанието „VIVA Математика с компютър“ от декември 2015. Става дума за файла, който може да бъде отворен на адрес http://cabinet.bg/img/content/151/p1112_zadacha 6.ggb . На Фиг. 6.1 е представен изглед на това, какво този файл „произвежда“. В червен цвят е дадена графиката на функцията $f(x) = \sqrt{a-x} + \sqrt{a+x}$, когато $a = 2.45$. Нарисувана е и хоризонталната права линия b, отстояща на разстояние $a = 2.45$ над абсцисната ос. Виждаме, че правата b пресича два пъти графиката на $f(x)$. Това показва, че уравнението $\sqrt{a-x} + \sqrt{a+x} = a$ има две решения при $a = 2.45$. От алгебричния прозорец (лявата част на Фиг. 6.1) се вижда и как е построен файлът zadacha 6.ggb. Най-напред с бутона

е направен плъзгач за параметъра a (с диапазон на промяна от 0 до 10). При тази операция автоматично се приписва някаква конкретна стойност на параметъра a. След

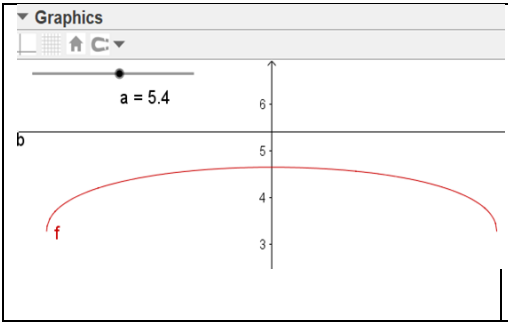
това, съгласно „правописа“ на ГеоГебра, чрез командния ред е въведена функцията $f(x) = sqrt(a - x) + sqrt(a + x)$ и правата $y = a$. Резултатът е показан на Фиг.6.1. При промяна на стойността на параметъра (чрез плъзгача) се променя графиката на функцията $f(x)$ и се измества нагоре или надолу правата b . При $2 \leq a < 4$ правата и графиката имат две пресечни точки, значи уравнението $\sqrt{a-x} + \sqrt{a+x} = a$ има две решения. При $a = 4$ уравнението има само едно решение: $x = 0$ (Фиг. 6.2). Както личи от Фиг. 6.3 и Фиг 6.4, при всички останали стойности на $a > 0$ уравнението $\sqrt{a-x} + \sqrt{a+x} = a$ няма решение.



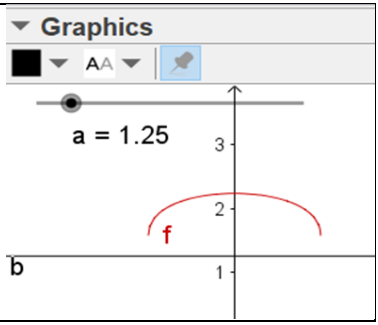
Фиг. 6.1



Фиг. 6.2



Фиг. 6.3

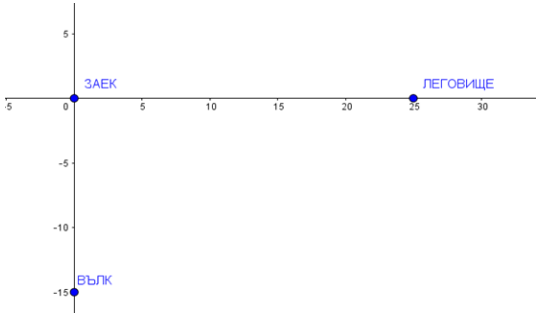


Фиг. 6.4

Задача 7

(Тема на месеца за месец октомври 2017 година)

Заек е навън от леговището си, когато забелязва, че към него се е втурнал вълк. Заекът хуква право към леговището си. Вълкът го преследва. Скоростта на заека е 2 метра в секунда. Скоростта на вълка е 3 метра в секунда, които той взема на един скок. Стратегията на преследване е проста. Всеки следващ свой скок вълкът насочва към позицията на заека в съответния момент. Първоначалното разположение на вълка, заека и леговището (в метри) е дадено на следната фигура.



Помощният файл на адрес http://cabinet.bg/img/content/151/p1112_zaek-valk.ggb представя развитието на преследването през първите 3 секунди (Фиг. 7.1). С A1, A2 и A3 е означена позицията на вълка съответно след първия, втория и третия негов скок. Точките B1, B2, B3 показват разположението на заека в първата втората и третата секунди.

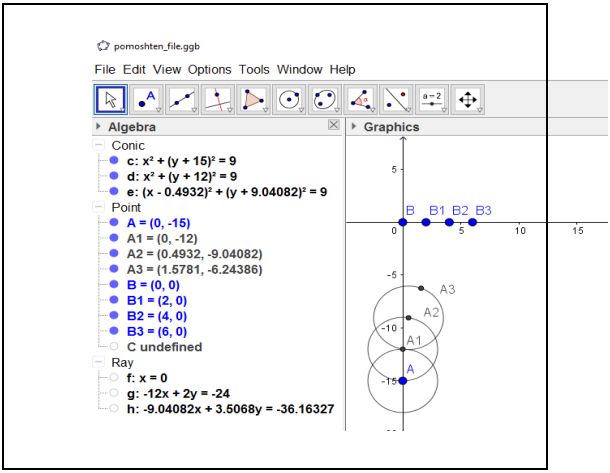
Задача 7.1

а) Какво ще е разстоянието между вълка и заека след петия скок на вълка?

(отговорът се търси с точност до стотни от метъра).

б) След кой скок на вълка разстоянието между него и заека ще стане по-малко от 1 метър?

(като отговор се записва цяло положително число).



Фиг. 7.1

Задача 7.2 С колко най-малко би трябвало да увеличи скоростта си заекът, ако иска да достигне леговището си невредим и след всеки скок на вълка разстоянието между тях да е поне един метър?

(отговорът се търси с точност до стотни от метъра в секунда).

Задача 7.3 На коя секунда разстоянието между вълка и заека ще стане по-малко от 1 метър, ако вълкът насочва всеки следващ свой скок не към положението на заека в съответния момент, а към неговото положението след една секунда?

(като отговор се записва цяло положително число).

Задача 7.4 На коя секунда разстоянието между вълка и заека ще стане по-малко от 1 метър, ако вълкът насочва всеки

следващ свой скок не към положението на заека в съответния момент, а по ъглополовящата на ъгъла Заек-Вълк-Леговище.

(като отговор се записва цяло положително число).

Решение на задачите.

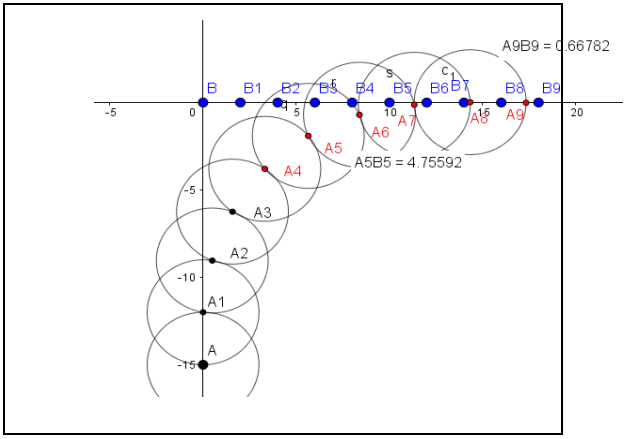
Цялостното решение на темата, заедно с помощните файлове на Геогебра може да се намери и на адрес http://vivacognita.org/images/monthly/VM1710/solutions_1710.pdf.

Тук представяме само „печатната версия“ на решенията и описваме построяването на помощните файлове.

Решение на задачи 7.1 а) и 7.1 б).

Нека в края на дадена секунда k вълкът е в точката Ak. В същият момент заекът ще е в точка Bk =(2 k, 0). Намирането на техните позиции в секундата k+1 е просто. Построяваме лъч с начало Ak, минаващ през Bk . Това става с помощта на бутона на системата Геогебра. Построяваме окръжност с център в Ak и радиус 3 (колкото е дължината на скока на вълка). Това става с помощта на бутона . Позицията на вълка в секундата k+1 е точно пресечната точка на лъча и окръжността. В същия момент заекът ще бъде в точката с координати (2 (k+1), 0), защото скоростта му е 2 метра в секунда. По този начин, тръгвайки от началните точки A и B, са намерени точките A1, A2, A3 и точките B1, B2, B3 от Фиг. 7.1 в условието на задачите от темата. За да се избегне претрупване на картината, лъчите от точките Ak към Bk са „скрити“. За решаването на задачата може помощният файл да се доразвие (допълни) с намирането на позициите на вълка и заека в следващите секунди по описания начин. На Фиг. 7.2 е представено преследването в първите 9 секунди. За

удобство, новодобавените точки за позицията на вълка в съответните моменти са дадени в червен цвят. С помощта на бутона е измерена дължината на отсечката A5B5, която е разстоянието между вълка и заека в края на петата секунда. Тази дължина е 4.75592 (пресмятанията са извършени с точност до 5 значещи цифри). Като отговор на задача 7.1 а) следва да се впише числото 4.76.



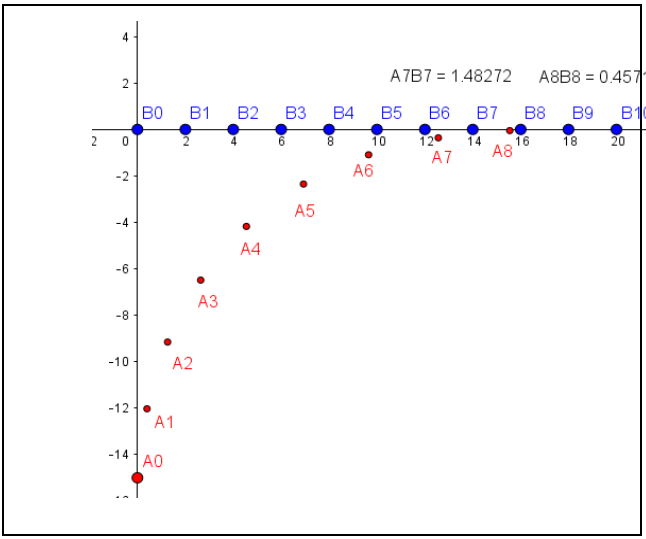
Фиг. 7.2

Със същия бутон за измерване на разстояние между две точки са измерени дължините на отсечките A6B6, A7B7, A8B8 и A9B9. Първите три се оказват по-големи от един метър и не са изведени на Фиг. 2. Дължината на отсечката A9B9 е дадена на Фиг. 7.2. Тя е 0.66782, което е по-малко от 1. Следователно, като отговор на задача 7.1 б) следва да запишем числото 9.

Решението на задача 7.2 изисква друг подход и ще бъде дадено накрая. Сега ще преминем към решенията на Задача 7.3 и Задача 7.4.

Решение на Задача 7.3.

Решението на тази задача е сходно с решението на задача 1. Намирането на положението A(k+1) на вълка в (k+1)-та секунда е пресечната точка на окръжността с радиус 3 и център в Ak с лъча от Ak към B(k+1) (а не с лъча от Ak към Bk!). Резултатът е показан на Фиг. 7.3, като лъчите и окръжностите са скрити за по-добра нагледност.



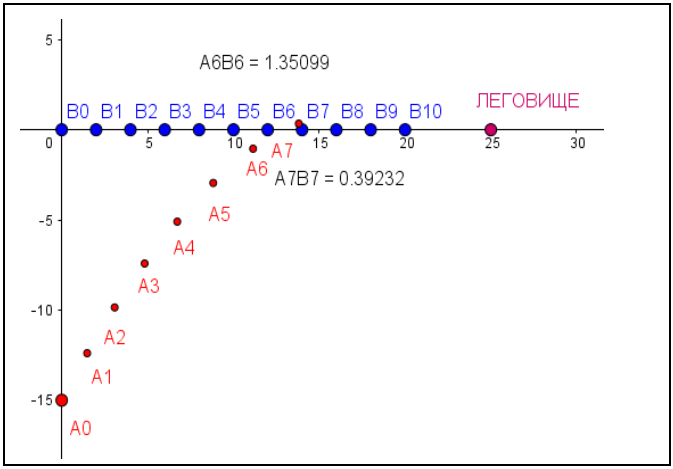
Фиг. 7.3

Вижда се, че в края на осмата секунда разстоянието между вълка и заека е 0.4571 метра, т.е. по-малко от 1 метър. Като отговор на задачата следва да се запише числото 8.

Решение на задача 7.4.

В тази задача положението A(k+1) на вълка в (k+1)-та секунда е пресечна точка на окръжността с радиус 3 и

център в Ak с ъглополовящата на ъгъла Леговище – Вълк - Заек. Тази ъглополовяща може да се намери с бутона . Резултатът от моделирането на преследването на заека с тази стратегия на вълка може да се види на Фиг. 7.4. Още в края на седмата секунда разстоянието между вълка и заека става по-малко от единица. Като отговор на задачата следва да се впише числото 7.

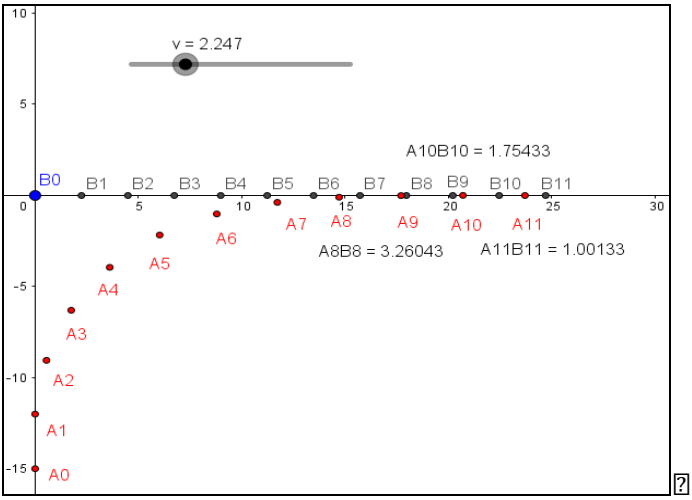


Фиг. 7.4

Решение на Задача 7.2.

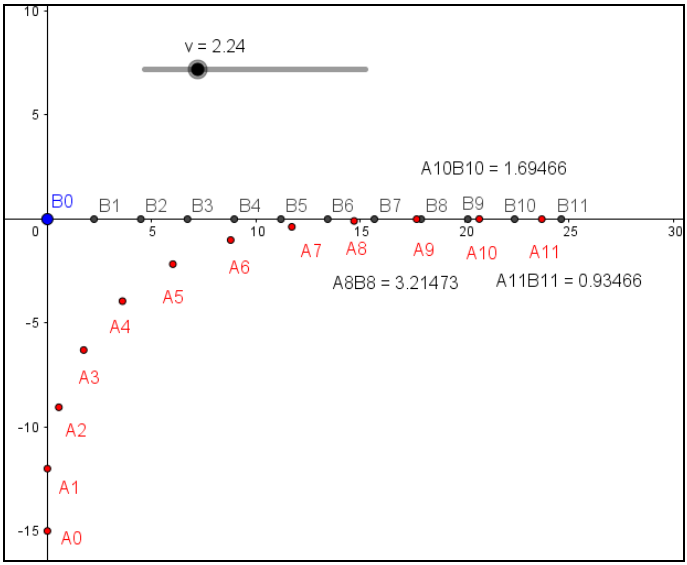
В тази задача вълкът следва първоначалната си стратегия. Всеки скок на вълка е насочен към положението на заека в същия този момент. Доколкото в условието на задачата става дума за скорост, добре е да се въведе плъзгач за стойностите v на скоростта на заека. Тогава позицията на заека в k – тата секунда е представена от точката Bk=(kv, 0). Конструкцията следва алгоритъма на решението на задача 1. Позицията на вълка в края на секундата k+1 е точно пресечната точка на лъча от Ak към Bk и окръжността с

център в Ak и радиус 3. На Фиг. 7.5 може да се види резаултатът от преслвдването при скорост на заека v = 2.247.



Фиг. 7.5

От тази фигура се вижда, че при скорост на заека 2,247 метра в секунда, на 11-тата секунда той ще е съвсем наблизо до леговището си (на разстояние 0.283 метра от леговището). В същия момент вълкът е на разстояние 1.001 метра от него. За да се скрие в леговището си на заека му трябват $\frac{0.283}{2.247} \approx 0.126$ секунди. За това време вълкът със скоростта си от 3 метра в секунда може да измине не повече от 0.378 метра и няма как да хване заека. Виждаме, че при скорост на заека 2.25, той ще успее да се добере невредим до леговището си, като в нито един момент от първите 11 секунди вълкът няма да бъде в опасна близост до него (по-малко от метър). Ако в плъзгача зададем стойност на скоростта v=2.24 получаваме като резултат картината на Фиг. 7.6:



Фиг.7.6

Заекът и в този случай ще се добере невредим до леговището си, защото за преодоляването на оставащите му 0.36 метра ще му трябват $\frac{0.36}{2.24} \approx 0.161$ секунди. За това време вълкът може да измине най-много 0.483 метра, а разстоянието между него и заека в края на 11-тата минута е A11B11=0.93466. Последното равенство показва обаче, че се нарушава условието на задачата вълкът след всеки скок да е на поне един метър от заека. Следователно, при скорост на заека от 2.25 метра в секунда се удовлетворяват изискванията на задачата, а при скорост 2.24 метра това не е така. Следователно, скоростта на заека трябва да нарастне от 2 метра в секунда до 2.25 метра в секунда. Нарастването е 0.25 метра в секунда. Числото 0.25 следва да се впише като отговор на задачата.

Задача 8

Проучете Тема на месец април 2017 на адрес

http://course.cabinet.bg/index.php?contenttype=publicview&testidselectedbyuser=98

Предложете вариант за използване на елементи от нея за подготовка на вашите ученици за онлайн състезание по математика с компютър.

Към анкетата за самопроверка:

Помощни файлове:

http://cabinet.bg/img/content/151/p1112_anketa 1.ggb

http://cabinet.bg/img/content/151/p1112_anketa2.ggb

http://cabinet.bg/img/content/151/p1112_anketa 3.ggb

Отговори:
p=2.63
u =1
5.11

ЛИТЕРАТУРА

1. Кендеров, П., Т. Чехларова. (2016). Състезание Математика с компютър и изследователски подход в образованието по математика. 128 с.
2. Кендеров, П., Т. Чехларова. (2014). Състезанието „Viva Математика с компютър” и ролята му за развитие на дигиталната компетентност на учениците. Шумен, МАТТЕХ. 2014. с. 3-10
3. Чехларова, Т. Подготовка на обучители за внедряване на изследователския подход в училищното образование по математика. (2017). Макрос, с.140
4. Кендеров, П., Т. Чехларова, Г. Гачев. (2015). Изследователски подход в математическото образование (помагало за обучение на обучители) София, Макрос.
5. Кендеров, П. (2018). Уеб-базирана платформа в подкрепа на изследователския подход в STEM образованието. Зборник на трудови од Меѓународна конференција за образованието по природни науки и математика, Скопје, 23-24 март 2018. с.88-93
6. Чехларова, Т. Изследователският подход в обучението по математика с използване на динамични образователни среди (помагало за учители). (2015). София, Макрос.
7. Chehlarova, T., Kenderov, P. (2015) *Mathematics with a computer – a contest enhancing the digital and mathematical competences of the students*, in Kovatcheva, E., Sendova, E (eds.) UNESCO International Workshop: *Quality of Education and Challenges in a Digitally Networked World*, Za Bukvite, O’Pismeneh, Sofia, Bulgaria, pp. 50-62.
8. Kenderov, P. (2018). Powering Knowledge Versus Pouring Facts. In: Kaiser, G., Forgasz, H., Graven, M., Kuzniak, A., Simmt, E., Xu, B. (eds) Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education. (pp. 289 – 306) ICME-13 Monographs. Cham: Springer.
9. Kenderov, P.,T. Chehlarova Extending The Class Of Mathematical Problems Solvable In School Serdica J. Computing 9 (2015), No. 3–4, 191–206 Serdica Journal of Computing Bulgarian Academy of Sciences Institute of Mathematics and Informatics
10. Kenderov, P., Chehlarova, T., Sendova, E. (2015) A Web-based Mathematical Theme of the Month, Mathematics Today, vol. 51, no. 6, pp. 305-309

Петър Кендеров Тони Чехларова

Институт по математика и информатика
Българска академия на науките

ПОДГОТОВКА ЗА СЪСТЕЗАНИЯ ПО МАТЕМАТИКА С КОМПЮТЪР В 9. - 10. КЛАС

(помагало за учители)

Регалия 6

ISBN 978-954-745-321-0

С подкрепата на Национална научна програма ”Информационни и комуникационни технологии за единен цифров пазар в науката, образованието и сигурността (ИКТвНОС)“, финансирана от МОН