http://cabinet.bg/index.php?contenttype=viewarticle&id=149

Ще разгледаме накратко математическата същност на задачата. Както и в предишните задачи, радиусът R на горната окръжност на кофата се определя от ъгъла α на изрязания сектор. Вече видяхме, че за него е изпълнено равенството $R = l(1-x)$, където $x = \frac{\alpha}{360}$. Радиусът на долната окръжност е r. Поради изрязването на допълнителната дъга с радиус $t = \frac{r}{1-x}$, за която стана дума по-горе, образуващият ръб на кофата е $l - t$.

Обемът на прав пресечен конус (каквато е формата на кофата) се пресмята по формулата $V = \frac{\pi}{3}h\left(R^2 + Rr + r^2\right)$, където h е височината на кофата. Тя се намира лесно с помощта на питагоровата теорема:

$$h^2 = (l-t)^2 - (R-r)^2 = \left(l - \frac{r}{1-x}\right)^2 - \left((1-x)l - r\right)^2$$

$$h^2 = \left(\frac{l(1-x)-r}{1-x}\right)^2 - \left((1-x)l - r\right)^2$$

$$h^2 = \left(l(1-x)-r\right)^2\left(\frac{1}{(1-x)^2} - 1\right) = (R-r)^2\left(\frac{1}{(1-x)^2} - 1\right)$$

$$h = (R-r)\sqrt{\frac{1}{(1-x)^2} - 1}$$

В нашия случай за обема на кофата получаваме

$$V = \frac{\pi}{3}h\left(R^2 + Rr + r^2\right) = \frac{\pi}{3}(R-r)\left(R^2 + Rr + r^2\right)\sqrt{\frac{1}{(1-x)^2} - 1}$$

$$V = \frac{\pi}{3}\left(R^3 - r^3\right)\sqrt{\frac{1}{(1-x)^2} - 1} = \frac{\pi}{3}\left(l^3(1-x)^3 - r^3\right)\sqrt{\frac{1}{(1-x)^2} - 1}.$$

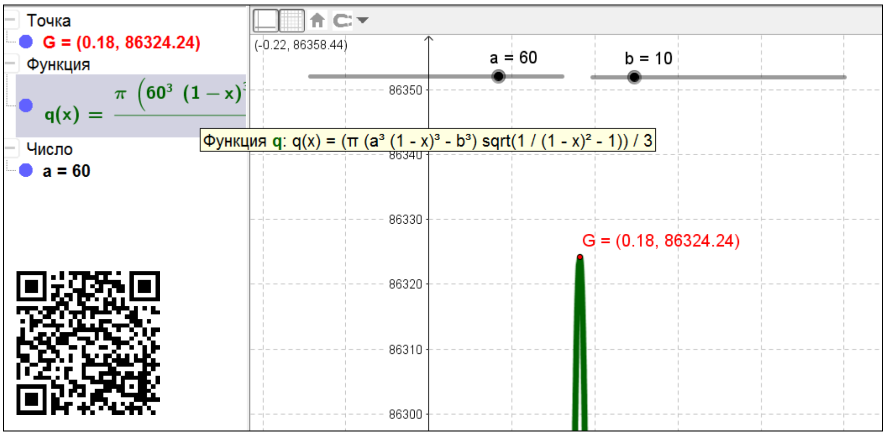
$$V = \frac{\pi l^3}{3}\left((1-x)^3 - \frac{r^3}{l^3}\right)\sqrt{\frac{1}{(1-x)^2} - 1}.$$

За да решим задачата, трябва да намерим максимума на тази функция.

Тук е уместно да отбележим нещо, на което само частично обърнахме внимание по-горе. За да може по описания в условието на задачата начин изобщо да се направи кофата, радиусът на изрязаната дъга $t=\dfrac{r}{1-x}$ трябва да е по-малък или равен на l. Следователно, за x трябва да е изпълнено неравенството $x\leq 1-\dfrac{r}{l}$.

Това показва, че трябва да търсим максимума на обема на кофата само за онези x, за които са изпълнени неравенствата $0\leq x\leq 1-\dfrac{r}{l}$.

Построяваме графиката на функцията $V=\dfrac{\pi l^3}{3}\left((1-x)^3-\dfrac{r^3}{l^3}\right)\sqrt{\dfrac{1}{(1-x)^2}-1}$, построяваме максимума ѝ в интервала $0\leq x\leq 1-\dfrac{r}{l}$ и установяваме, че търсеният обем е 86324 куб. ед. Той се получава при $x=0{,}18$, т.е. при изрязване на $\dfrac{18}{100}$ от дадената окръжност.



http://www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/html/d22552.html