РЕШЕНИЯ

На задачите от „Тема на месеца“

за месец юни 2018 година

Задача 1. Точките A и B са зададени с координатите им: A(0;0) и B(4;2). За точката M(x;y) знаем, че разстоянието от M до A се отнася към разстоянието от M до B както 3:5, т.е. MA/MB= 3/5.

а) Намерете най-голямата възможна стойност за x с точност до стотните.
б) Намерете най-голямата възможна стойност за y с точност до стотните.

Задача 2. Окръжността k1 е с център в точката A(0;0) и има радиус 1. Окръжността k2 е с център в точката B(4;2) и има радиус 0.5. За точката M(x;y) знаем, че дължината на допирателна от M до k1 се отнася към дължината на допирателна от M към k2 както 3:5.

а) Намерете най-малката възможна стойност за x с точност до стотните.
б) Намерете най-малката възможна стойност за y с точност до стотните.

Задача 3.Точката A(0;2) е център на окръжност k с радиус 1. Правата l е успоредна на абсцисната ос и минава през точка B(0;–2). Точките M(x;y), за които разстоянието от M до l е равно на дължината на допирателна от M към k, образуват крива линия, разделяща правоъгълника с върхове в C(1;0), D(3;0), E(3;1) и F(1;1) на две части. Намерете отношението на лицето на по-малката част към лицето на по-голямата част. Отговорът се търси с точност до стотните.

Отговори на задачите.

задача	отговор
1 а)	1.94
1 б)	3.07
2 а)	- 6.61
2 б)	-5.48
3	0.71

Решение на Задача 1.

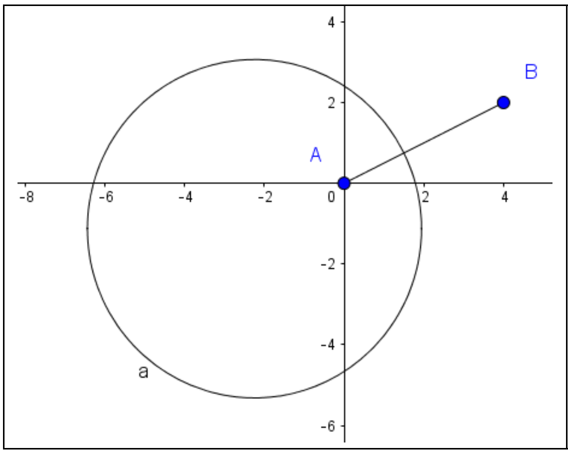
Преди всичко е добре да разберем как изглежда множеството от точки M(x;y), за които разстоянието от M до A се отнася към разстоянието от M до B както 3:5. В такива случаи понякога се употребява интуитивно ясният израз „търсим **Геометрично място на точки** с някакво свойство“. В случая свойството е „разстоянието от M до A се отнася към разстоянието от M до B както 3:5“. От питагоровата теорема следва, че разстоянието от M(x,y) до A(0,0) е $\sqrt{x^2 + y^2}$, а разстоянието от M до B е $\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2}$. Ако M е точка от търсеното геометрично място, ще е изпълнено равенството

$$3\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} = 5\sqrt{x^2 + y^2} .$$

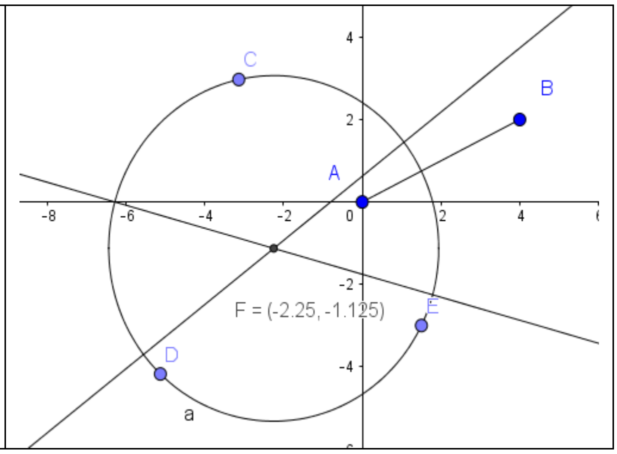
Записваме това равенство в командния ред на Геогебра по следния начин

3((x – 4)^2 + (y – 2)^2)^0.5 = 5(x^2 + y^2) ^0.5 .

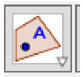
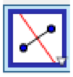
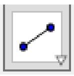
След натискане на клавиша Enter, програмата Геогебра (версия 5.04 или по-нова) автоматично изобразява всички точки, чиито координати удовлетворяват това равенство. Резултатът от това действие е представен на Фиг. 1 . Той ни подсеща, че търсеното геометрично място е окръжност, която на чертежа е означена с **a**. Ако знаем координатите (p, q) на центъра и радиуса R на тази окръжност, лесно ще получим отговорите на Задача 1. За Задача 1а) отговорът ще бъде p + R, а за Задача 1б) отговорът ще бъде q + R.



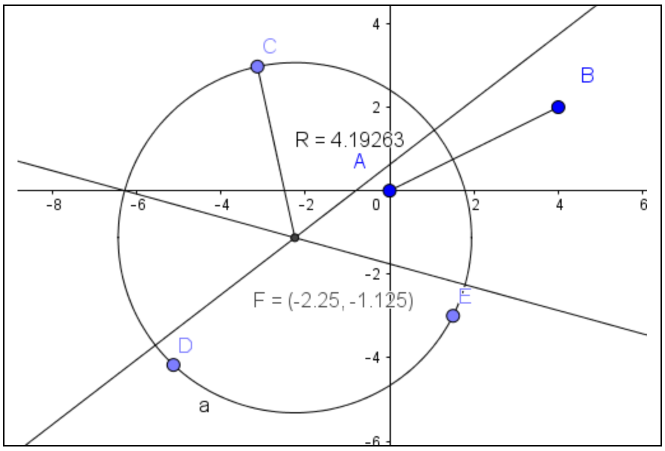
Фиг. 1



Фиг. 2

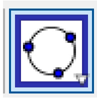
За намирането на p, q и R избираме (с помощта на бутона ) три точки C, D и E от **a** и с помощта на бутона  прекарваме симетралите на отсечките CD и CE. Пресечната точка на тези симетрали е означена с F. Тя е център на окръжността **a**. От Фиг. 2 се вижда, че F има координати (-2.25, - 1.125). Радиусът R на **a** можем да намерим като дължина на отсечката CF (с помощта на бутона ). Резултатът е изобразен на Фиг. 3: R = 4.19263. Значи, R + p =

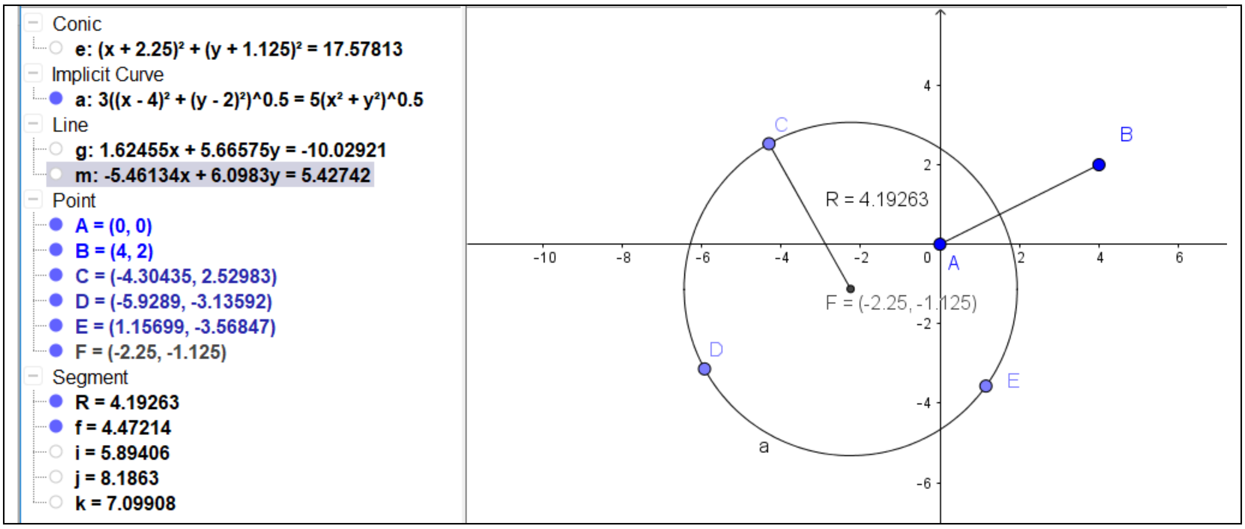
4.19263 – 2.25 = 1.94263 ≅ 1.94. Отговорът на задача 1 а) е 1.94. Аналогично, R + q = 4.19263 – 1.125 = 3.06763 ≅ 3.07.   Отговорът на задача 1 б) е 3.07.



Фиг. 3

Файлът Zadacha1.ggb, с който бяха извършени досегашните построения, може да бъде отворен, като щракнете тук. Той съдържа и една допълнителна проверка на отговорите, която

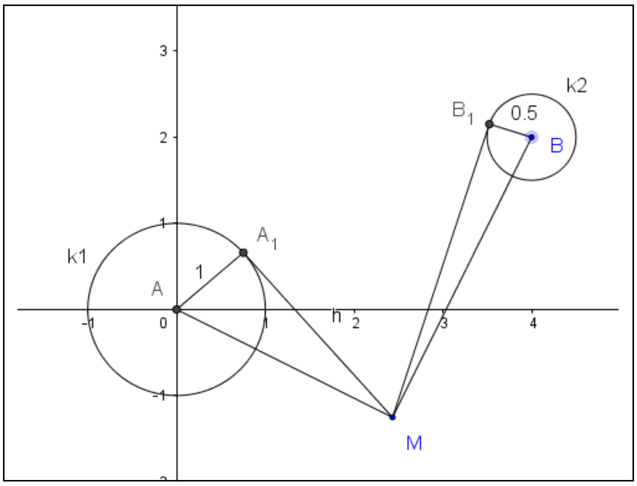
Геогебра позволява да извършим. С бутона  е построена окръжност през точките C, D и F. Както и следва да се очаква, тази окръжност съвпада с търсеното геометрично място. Тя е означена със символа **e** в протокола, с който е създаден този файл. Най-отгоре в лявата страна на екрана на Фиг. 4 виждаме уравнението $\mathbf{e: (x + 2.25)^2 + (y + 1.125)^2 = 17.57813}$. Това е уравнение на окръжност с център точката (- 2.25, - 1.125) и радиус $\sqrt{17.57813} \cong 4.19263$. Виждаме, че пресметнати и по този начин, координатите (p, q) на центъра и радиуса R на окръжността съвпадат с намерените по-горе.



Фиг.4

Решение на Задача 2.

Отсечките MA_1 и MB_1 на Фиг.4 са допирателни съответно към окръжностите k1 и k2, определени в условието на задачата. Теоремата на Питагор, приложена за $\Delta\, AMA_1$, позволява



Фиг. 4

да изразим дължината на MA_1 чрез MA:

$MA_1 = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$.

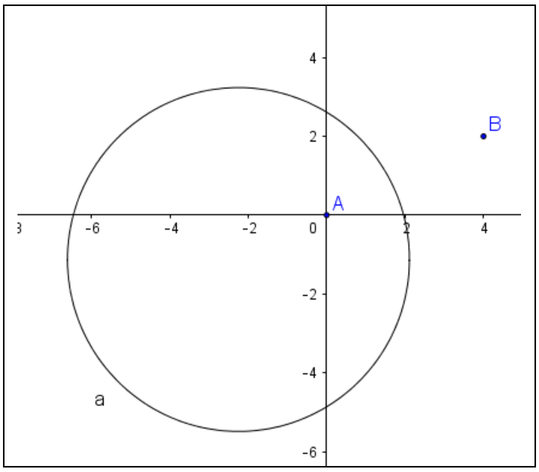
Аналогично, от $\Delta\, BMB_1$, определяме дължината на MB_1:

$MB_1 = \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2 - 0.25}$.

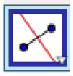
Ако M(x,y) е от търсеното геометрично място на точки, следва да е изпълнено равенството

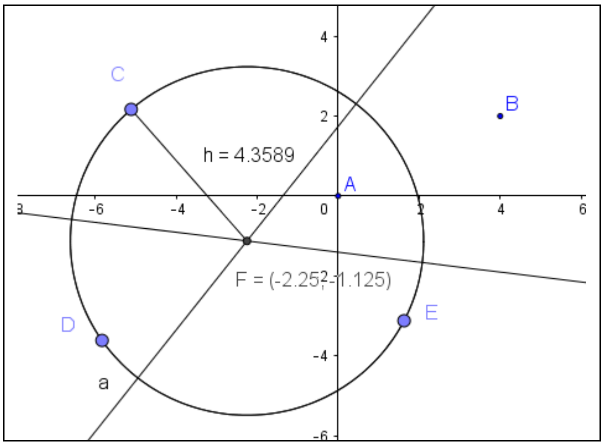
$5\sqrt{x^2 + y^2 - 1} = 3\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2 - 0.25}$. Записваме това равенство в командния ред на Геогебра по следния начин

3((x – 4)^2 + (y – 2)^2 – 0.25)^0.5 = 5(x^2 + y^2 - 1) ^0.5 . След натискане на Enter, Геогебра визуализира търсеното геометрично място. Резултатът е показан на Фиг. 5. Отново получаваме окръжност и отново я означаваме с **a**. Центърът и радиусът на **a** можем да определим, както в



Фиг. 5

решението на Задача 1. Избираме три точки C, D и E от **a** и с помощта на бутона  прекарваме симетралите на отсечките CD и CE. Пресечната точка на тези симетрали е означена с F. Тя е център на окръжността **a**. Както се вижда от Фиг. 6, новото геометрично място има за център същата точка F (-2.25, - 1.125), но радиусът R сега е друг: R= 4.3589.



Фиг. 6

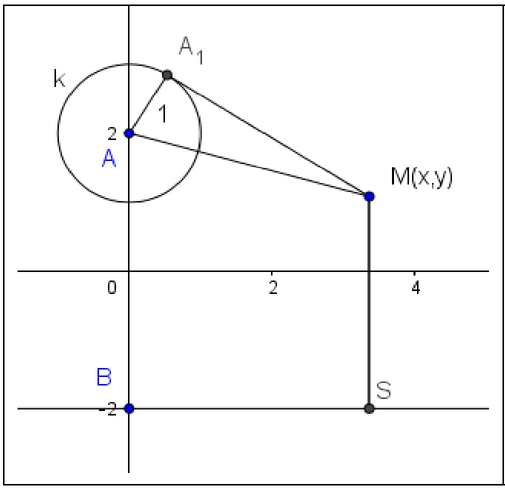
Отговорът на Задача 2 а) ще получим, като от – 2.25 извадим 4.3589 и закръглим до стотни. Отговорът на Задача 2 а) е – 6.61. Аналогично намираме отговора на Задача 2 б): - 1.125 – 4.3589 $\cong -5.48$.

Файлът Zadacha2.ggb с построенията в тази задача може да се отвори чрез щракване тук.

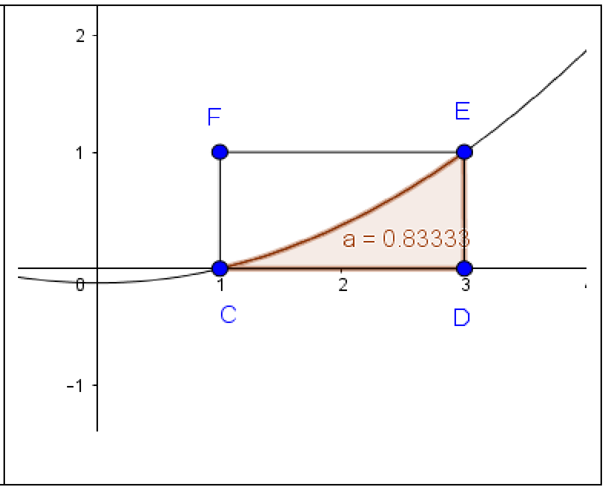
Решение на Задача 3.

Ситуацията е изобразена на Фиг. 7. Отсечката MA_1 е допирателна към окръжността k . По теоремата на Питагор, приложена за $\Delta\ AMA_1$, квадратът на нейната дължина е

$x^2 + (y-2)^2 - 1$. Квадратът на дължината на отсечката MS (т.е. квадратът на разстоянието от M до правата l) е $(y+2)^2$. Търси се геометричното място от точки, за които е изпълнено равенството $(y+2)^2 = x^2 + (y-2)^2 - 1$. След опростяване на това уравнение получаваме $y = \frac{x^2-1}{8}$, което е уравнение на парабола. Тя е изобразена на Фиг. 8. На същата фигура е изобразен и правоъгълникът CDEF и оцветената в светлокафяв цвят част от него, намираща се под параболата.



Фиг. 7



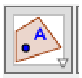
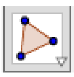
Фиг. 8

Числото a = 0.83333 е лицето на оцветената част от правоъгълника. То е намерено с командата

IntegralBetween(f, g, *a, b*), която пресмята лицето на фигурата между графиките на функциите f и g в интервала [*a*,*b*]. В нашия случай f = $\frac{x^2-1}{8}$, g = 0, a=1, b=3. Лицето на целия правоъгълник е 2. Следователно частта му над графиката на f = $\frac{x^2-1}{8}$ има лице 2 – 0.83333 = 1.16667.

Отношението на по-малката към по-голямата част е $\frac{0.83333}{1.16667} = 0.71428 \cong 0.71$. Отговорът на тази задача е 0.71 .

Забележка. Намирането на достатъчно добро приближение за лицето на оцветената част на правоъгълника CDEF може да стане и без използване на командата IntegralBetween(f, g, *a, b*).

Достатъчно е по оцветената част на параболата с помощта на бутона  да се отбележат много точки (достатъчно е да са 30-тина, разположени „равномерно“) и след това с бутона  да се намери лицето на многоъгълника, образуван от тези точки и от точките C, D, E.

Отговорността за окончателното формулиране на темата, описанието на решенията и подготовката на помощните файлове е на Петър Кендеров. В обсъждането на темата и редактирането на текстовете участваха Ивайло Кортезов, Тони Чехларова и Мария Браухле. Логото на темата е направено от Койя Чехларова. Уеб-поддръжката и техническото осигуряване са дело на Тодор Брънзов и Георги Гачев.