Тема на месец юни 2018

Окръжност с радиус r и отбелязана точка **M** върху нея се търкаля без приплъзване по отсечка с дължина s. При старта точката **M** съвпада с единия край на отсечката.

Задача 1. Намерете дължината на пътя, изминат от точката **M,** при търкаляне на окръжността по цялата отсечка, ако:

а) s=21,4 cm и r=3,4 cm

Запишете в cm с точност до десетите

б) s=21,4 cm и r=1,7 cm

Запишете в cm с точност до десетите

в) s=40 cm и r=7 cm

Запишете в cm с точност до десетите

г) s=40 cm и r=1,7 cm

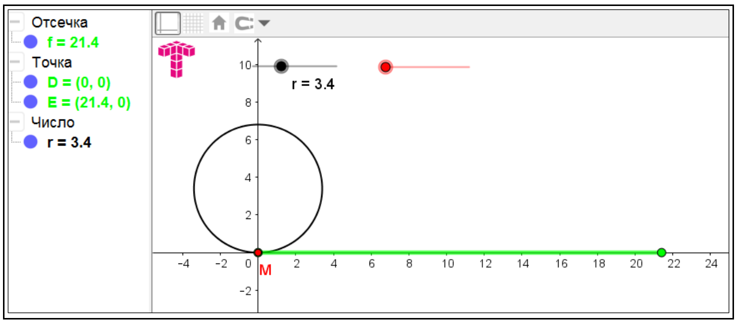
Запишете в cm с точност до десетите

Задача 2. При търкаляне на окръжност с радиус 2,7 cm от единия до другия край на отсечка точката **M** изминава разстояние 60 cm. Намерете дължината на отсечката.

Запишете в cm с точност до десетите

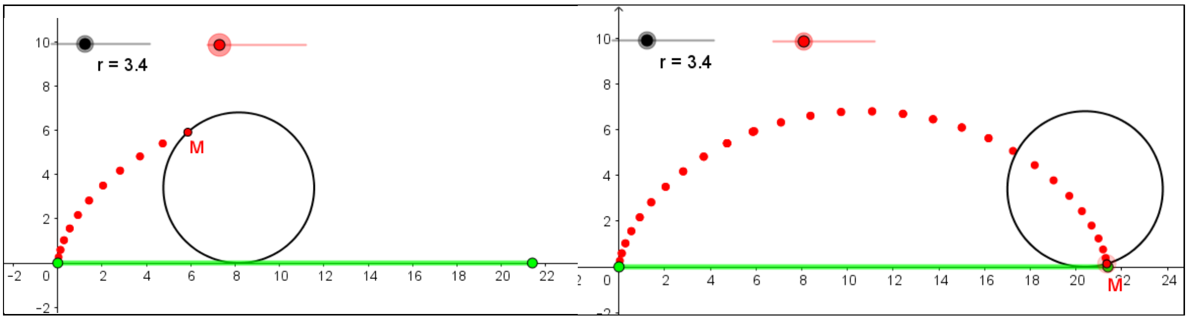
Решение:

Предоставеният помощен файл съдържа окръжност, радиусът на която се управлява с плъзгач r (фиг.1).



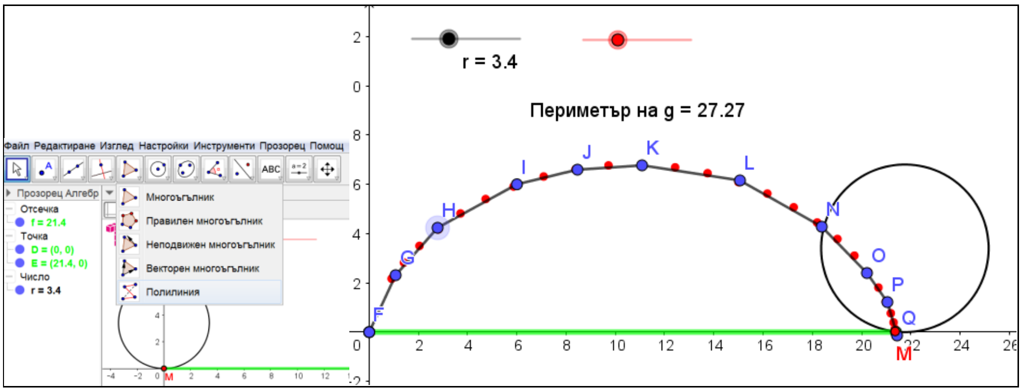
Фиг.1 http://cabinet.bg/img/content/151/186_1.ggb

Придвижването на тази окръжност по отсечка се осъществява с червения плъзгач. Точката M е в режим следа (фиг.2). Получената следа при търкалянето на окръжността по цялата отсечка дава информация за кривата, на която се търси дължината.



Фиг.2

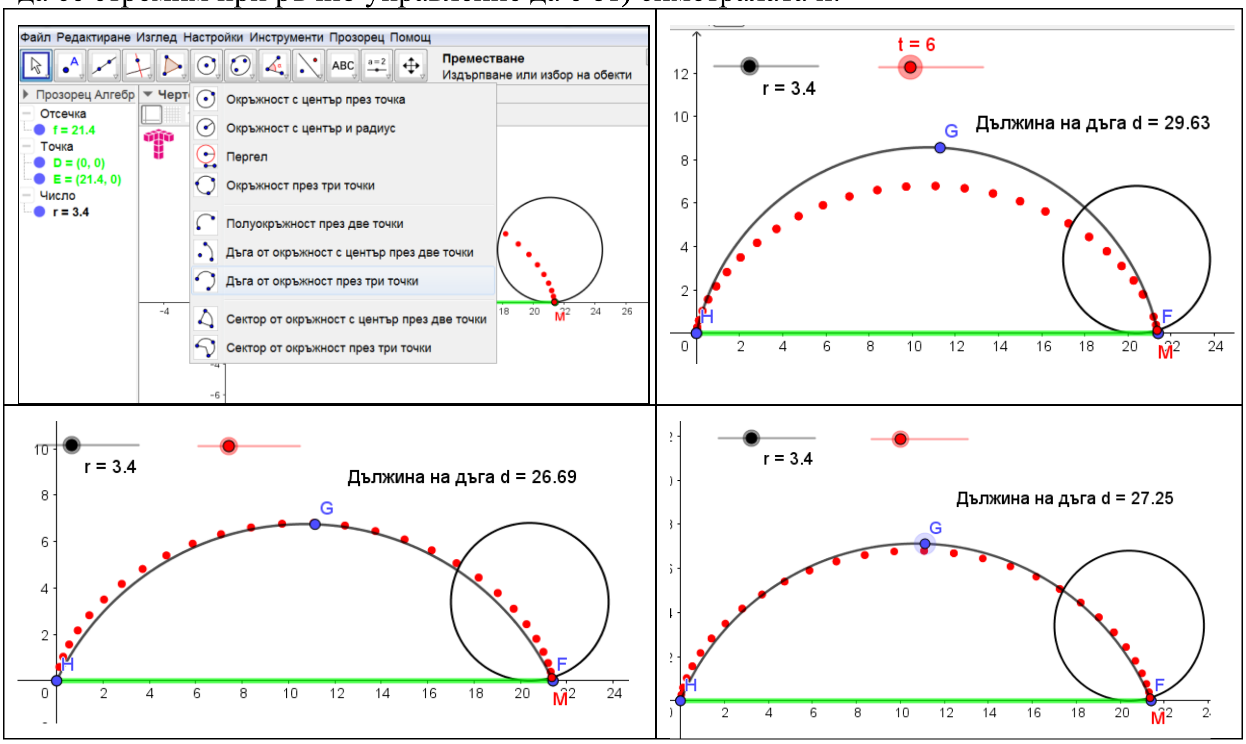
Една възможност за намиране на приблизително решение на задачата е чрез използване на **начупена линия**, т.е. чрез апроксимиране с начупена линия на кривата, на която се търси дължината. На Фиг 3 е показана една апроксимация с използване на начупената линия FGHIJKLNOQ. Дължината на тази начупена линия е 27,27 с точност до десетите.



Фиг.3 http://cabinet.bg/img/content/151/186_2.ggb

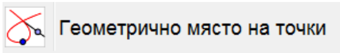
Ясно е, че ако се използват повече на брой точки, може да се постигне по-добро приближение. Приближаване до точния отговор може да се реализира и чрез използване на две апроксимации с начупени линии, едната от които да е над, а другата – под червените точки, които маркират кривата, показваща пътя на точката М. Търсеното число ще е между дължините на тези две начупени линии.

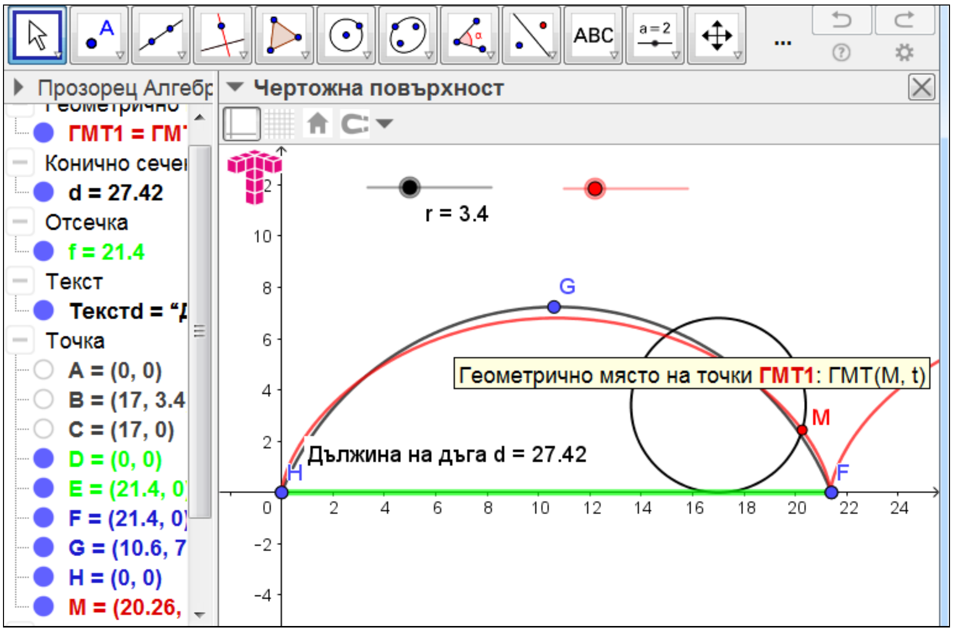
Като имаме предвид получената форма, може да се експериментира с **дъга на окръжност**. От гледна точка на симетрията, центърът на окръжността е естествено да лежи на симетралата на отсечката. Ако използваме бутона „Дъга от окръжност през три точки", подходящо е двете точки да са в краищата на отсечката, а средната да е от (или да се стремим при ръчно управление да е от) симетралата ѝ.



Фиг.4 http://cabinet.bg/img/content/151/186_3.ggb

Забелязваме, че с дъга от окръжност не се постига точен резултат. И тук може да се използват две дъги – съответно над и под червените точки, или една дъга, за която част от червените точки са над, а останалите – под нея (фиг.4).

Нека използваме бутона  за геометрично място на точки за точката M и параметъра t (Фиг.5).

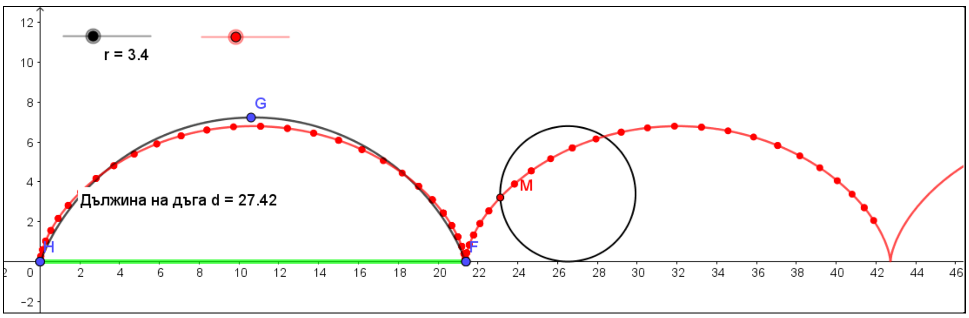


Фиг.5 http://cabinet.bg/img/content/151/186_4.ggb

Тук ясно можем да установим, че кривата не е част от окръжност.

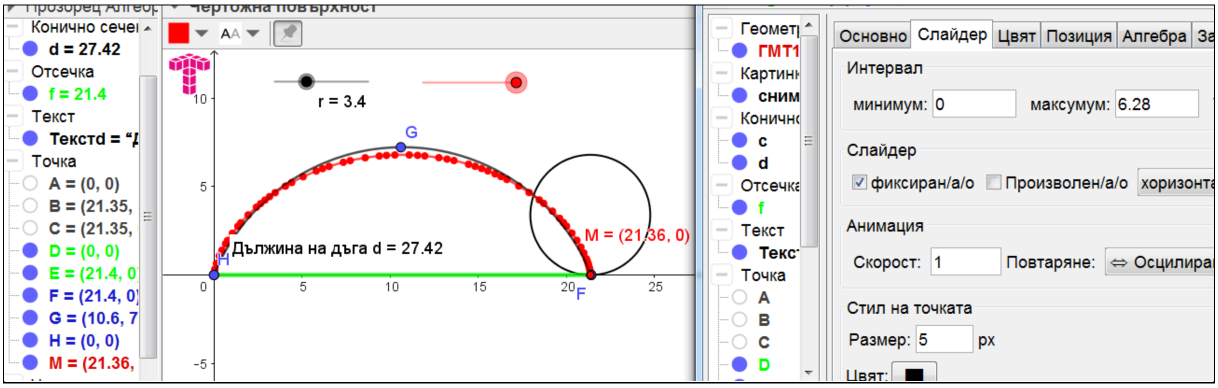
При наблюдението забелязваме няколко неща:

- Естествено, следата на точката M е точно върху полученото геометрично място ГМТ1.



Фиг.6

- Бутонът за дължина на линия не може да се използва за получената като геометрична място от точки крива линия, т.е. към момента софтуерът не дава възможност да се изведе директно търсената числова стойност.
- Ако искаме да получим само търсеното множество, трябва да коригираме горната граница на параметъра t. Резултатът при горна граница 6,28 на интервала на изменение на t е показан на фиг.7



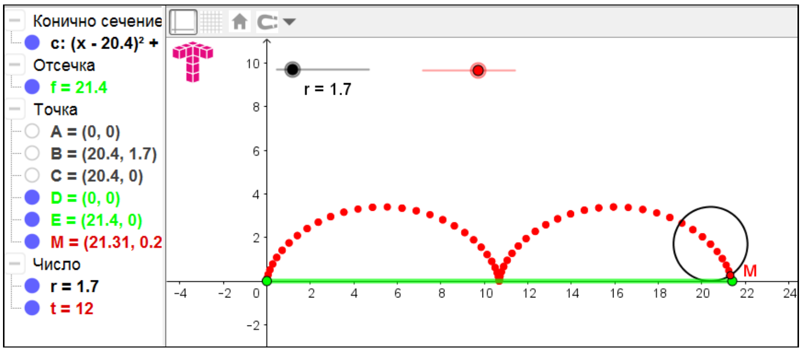
Фиг.7

Тук ще обърнем внимание върху закръгляването при изчисления. Когато предварително е зададена точност за крайния отговор, се очаква изчисленията да се правят с по-голяма точност и да се закръглява крайният резултат. Когато се изчислява с компютър и се въвеждат не числа, а измерения на обекти, точно така е програмирано да се извършва изчислението и представянето на отговора. В тази задача се използва и числото π, т.е. се работи с някакво негово приближение. За предпочитане е да се въвежда в съответната формула сиволът π , защото се включват много негови знаци след десетичнта запетая и съответно точността е по-голяма в сравнение с традиционно използваните 2 или 3 знака след десетичната запетая.

Забелязваме, че при пълна обиколка абсцисата на точката М е 21,36, а не 21,4. Ако използваме за π стойността 3,14, ще получим за дължината на окръжността 21,352, което с точност до десетите е 21,4. Но всички предварителни закръгляния предизвикват понякога големи отклонения в крайния резултат. В тази задача, за постигане на обсциса на точката М 21,4, е необходимо да се продължи с малка част от второ завъртане.

Отговорът на задачата, при използване на сивола π и закръгляване с точност до десетите след получаване на резултат с по-голяма точност, е 27,5. Но при предварителни закръглявания, например, при закръгляване на пълното завъртане на 21,4, ще се получи отговор 27,2.

За решаване на подточка б) ще използваме същия файл. След промяна на радиуса и „търкаляне“ чрез червения плъзгач забелязваме, че окръжността прави два пълни кръга при преминаване на същата отсечка.



Фиг.8 http://cabinet.bg/img/content/151/186_5.ggb

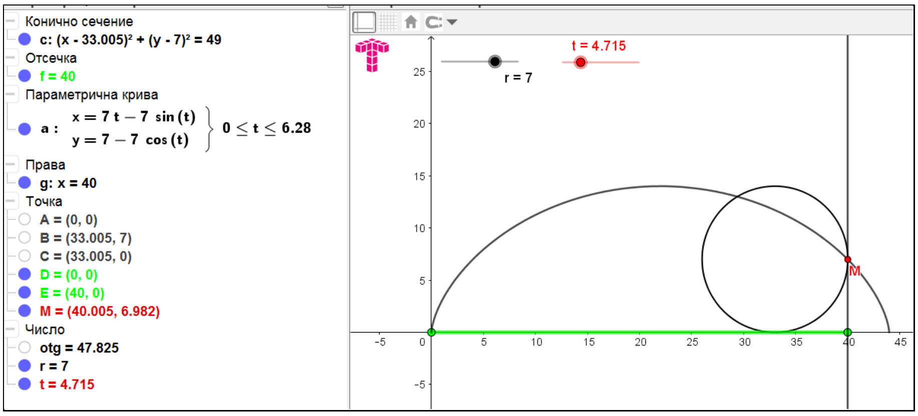
За търсеното разстояние се получава отново същият отговор.

Наблюдателните ще забележат, а любознателните и след изследване могат да стигнат лесно до закономерност между търсения път и радиуса на окръжността. Тази закономерност води до хипотезата $L=8r$, където r е радиусът на дадената окръжност, а L е дължината на пътя на точка от окръжността при едно пълно завъртане.

Разглежданата крива се нарича циклоида.

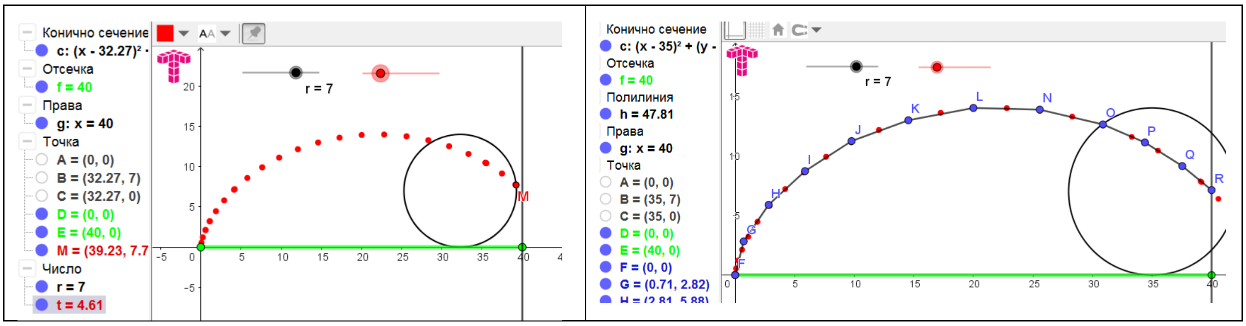
Като имаме предвид, че кривата е циклоида, може да се използват и други начини за построяване на файла, например чрез открити аналитични представяния – (http://cabinet.bg/img/content/151/186_6.ggb)

A = Крива(r t - r sin(t), r - r cos(t), t, 0, 6.28) и otg = 4r (1 - cos(t / 2)).



Фиг.9 http://cabinet.bg/img/content/151/187_1.ggb

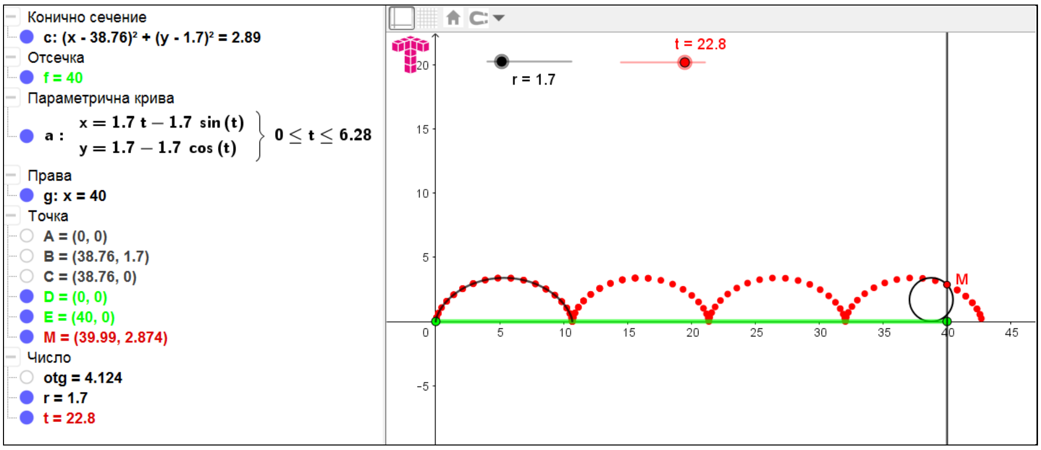
За получаването на отговор на подточка в) задаваме с плъзгача радиус 7. За нагледност сменяме абсцисата на точката Е с 40. Остава експериментално да получим следата на точката М (Фиг.10). Макар да не е толкова лесно точката М да „спре“ при абсциса 40, когато използваме начупена линия или част от дъга на окръжност, можем да прецизираме. С начупената линия получаваме приблизителен отговор 47,81 cm. (Фиг.10).



Фиг.10

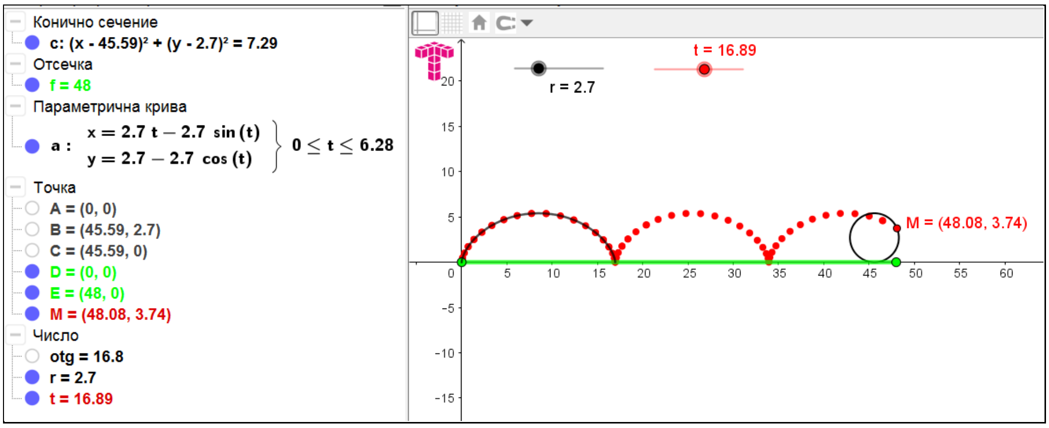
Ако използваме файла, построен чрез аналитичното представяне на циклоидата, получаваме отговор 47,8 (Фиг.9).

За моделиране на случая в подточка г) се налага да се смени горната граница на изменние на параметъра t, например на 30 (Фиг.11). при преминаване по отсечката окръжността извършва три пълни завъртания и част от четвърто. Отговорът на 1г) е 50,3 cm.



Фиг.11 http://cabinet.bg/img/content/151/187_2.ggb

За решаването на задача 2 ще използваме файл от решаването на задача 1. След две пълни обиколки точката M изминава 2*8*2.7=43.2 и до 60 cm й остават още 16.8 cm. След изминаване и на тези 16.8 cm точката M има абсциса 48,08 с точност до стотните. Отговорът на задача 2 е 48.1 cm.



Фиг.12 http://cabinet.bg/img/content/151/187_3.ggb

Можете да разгледате темата с помощ и решения на адреси:

http://cabinet.bg/index.php?contenttype=viewarticle&id=186

http://cabinet.bg/index.php?contenttype=viewarticle&id=187