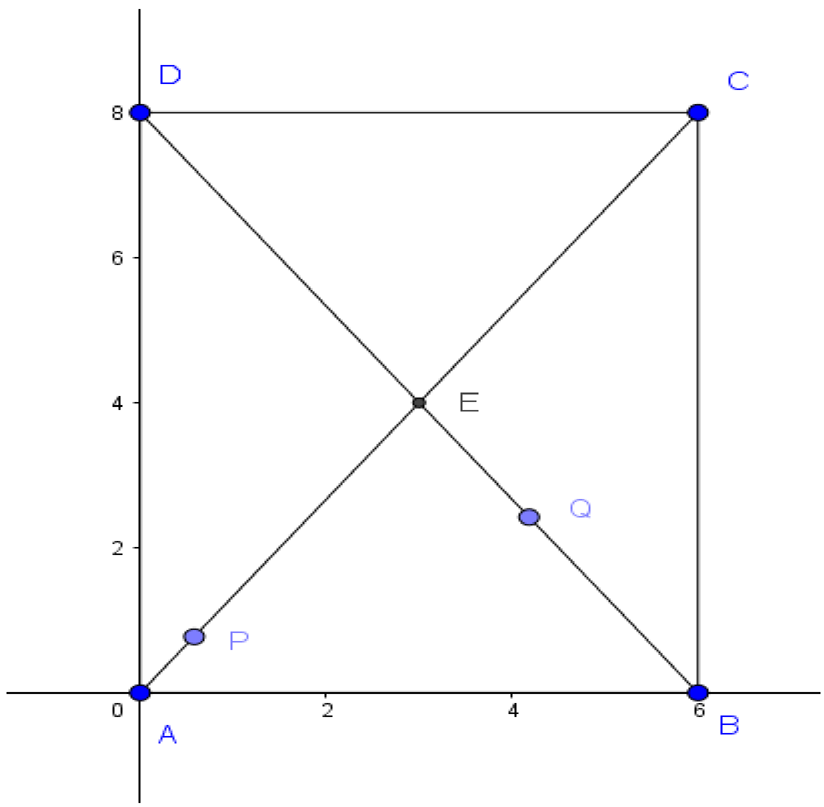
Решения на задачите от

Тема на месеца за февруари 2018

Даден е правоъгълник ABCD със страни AB=6 метра и BC=8 метра. Две точки P и Q се движат „напред назад“ и „открай до край“ по диагоналите AC и BD (Фиг.1).



Фиг. 1.

Задача 1. Нека скоростта на точката P е 3 метра/минута, а скоростта на точката Q е 1 метър/минута. В началния момент точката P съвпада с точката A и Q съвпада с B.

а) В края на коя минута точките P и Q ще попаднат едновременно в точка E за трети път? Отговорът се търси с точност до единиците.
б) Какво е разстоянието между точките P и Q в края на осмата минута? Отговорът се търси с точност до стотните.
в) Каква е най-голямата дължина на отсечката PQ между 12-тата и 16-тата минута? Отговорът се търси с точност до хилядните.

Задача 2. Точките P и Q са центрове на кълбета с радиус r . Точката P се движи със скорост 2 метра/минута, а скоростта на точката Q е 1 метър/минута. Нека в началния момент точката P съвпада с A, а Q съвпада с B. Кой е най-големият според Вас радиус r (в метри), за който двете кълбета няма да се ударят в първите 50 минути? Отговорът се търси с точност до стотните от метъра.

Задача 3. Точка P се движи със скорост 2.7 метра/минута и тръгва от точка A. Точка Q сега тръгва от E към D и се движи със скорост 1 метър/минута. Какво е най-малкото разстояние между точките P и Q в първите 40 минути след започването на движението? Отговорът се търси с точност до стотните от метъра.

Забележка: За изследването на задачите можете да използвате следния помощен файл (1802.ggb).

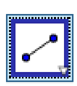
Отговори на задачите

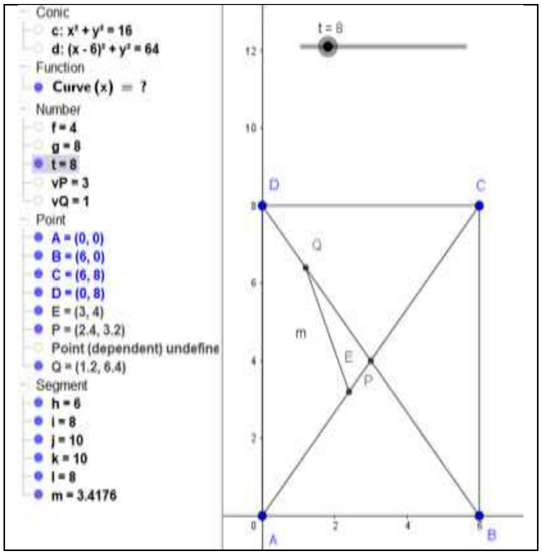
задача	1а	1б	1в	2	3
отговор	25	3.42	5.696	0.97	0.31

Решения на задачите.

Задача 1 а). От теоремата на Питагор следва, че двата диагонала AC и BD са дълги 10 метра. В алгебричния прозорец на помощния файл скоростта на точката P е означена с vP, а скоростта на точката Q е означена с vQ. С двойно щракване върху някое от тези означения получаваме възможност да сменяме стойността му. Промяната влиза в сила след натискане на клавиша Enter. Слагаме vP=3 и vQ=1. Като променяме времето t с помощта на плъзгача, забелязваме, че двете точки P и Q попадат едновременно в точка E най-напред в края на 5-та минута и след това през 10 минути. Следователно отговорът на задача 1 а) е 25. В това можехме да се убедим и „ръчно“, без помощния файл. Достатъчно е да съобразим, че всеки път, когато Q попадне в E, там ще бъде и P.

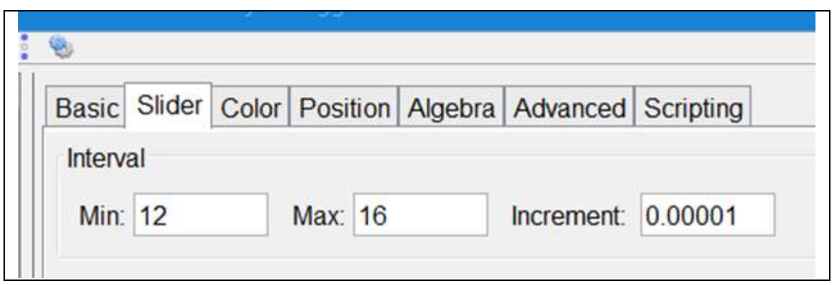
Естествено, тази задача не е затруднила участниците.

Задача 1 б). С помощта на бутона  построяваме отсечката PQ. Това автоматично извежда в алгебричния прозорец нейната дължина m. Нагласяваме с плъзгача времето на t = 8 и виждаме, че m = 3.4176 (Фиг.2). Отговорът на задача 1 б) е 3.42. Тази задача е решена точно от почти всички участници.



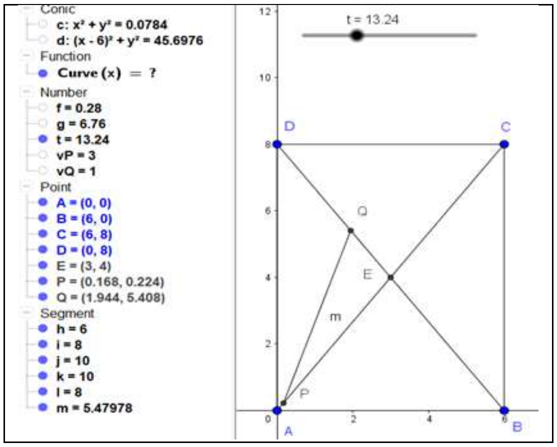
Фиг. 2

Задача 1 в). За удобство, променяме плъзгача така, че времето t „да се движи“ само между 12 и 16, а не между 0 и 50. Това става с двойно щракане върху плъзгача и промяна на границите, между които се движи t. При Min вместо 0 записваме 12, а при Max вместо 50 слагаме 16. Получаваме каквото е изобразено на (Фиг. 3):



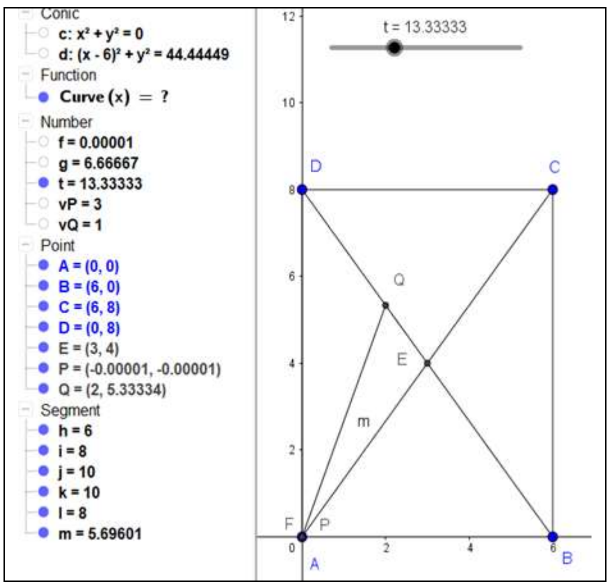
Фиг. 3

Като местим плъзгача за t и наблюдаваме стойността на m забелязваме, че когато P отива към A дължината m расте, а когато P се отдалечава от A, стойността на m намалява (Фиг.4).



Фиг. 4

Това ни подсказва, че максималната стойност за m ще се достигне, когато P съвпадне с точка A. В интервала, който разглеждаме, това става при t=40/3=13.33333…… . Задаваме тази стойност за t в алгебричния прозорец и виждаме, че m=5.69601 (Фиг.5). Т.е. отговорът на задача 1 в) е 5.696.



Фиг. 5

С малки изключения и тази задача е решена със задоволителна точност. Един от участниците е записал като отговор 13.3333, което всъщност е стойността на t, при която се постига максимумът за m. По същество, този участник е решил задачата, но е трябвало да запише стойността на m, а не на t.

Задача 2. За изследването на тази задача най-напред променяме скоростта на P, като сложим vP=2. Скоростта на другата точка си остава vQ=1. За да решим задачата, е достатъчно да намерим минималната дължина m на отсечката PQ в първите 50 минути. Половината от тази минимална дължина ще дава отговора на задачата. За да се ориентираме в кои моменти t дължината m приема малки стойности, въвеждаме чрез командния ред една нова точка S=(t, m) и проследяваме движението ѝ, когато променяме t чрез плъзгача. На Фиг. 6 се вижда следата на тази точка, която е получена чрез използване на функционалността ”Trace on” за точката S. Тази следа е всъщност графиката на функцията m(t) (променливата t се движи по абсцисната ос).

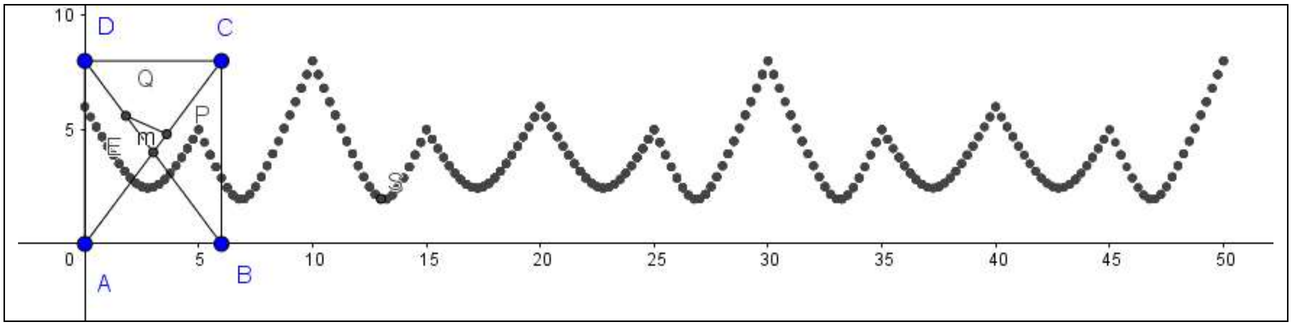
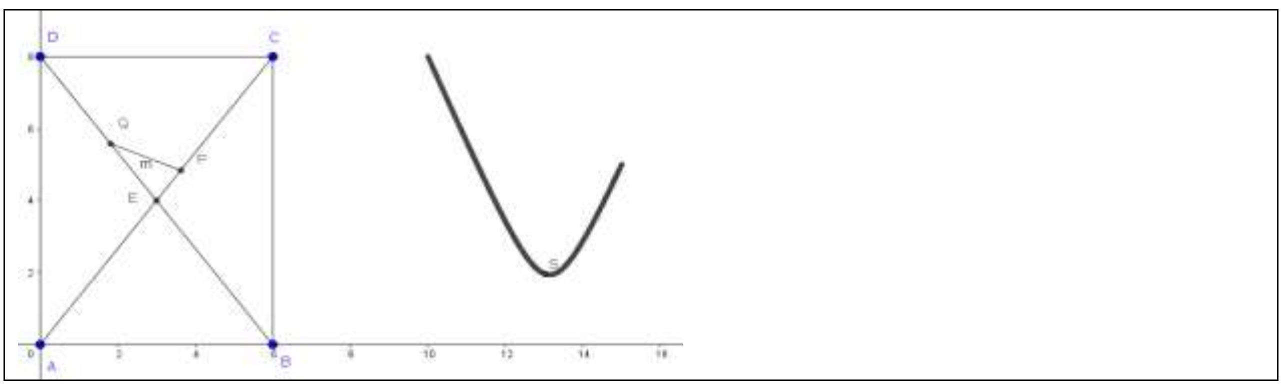


Fig. 6

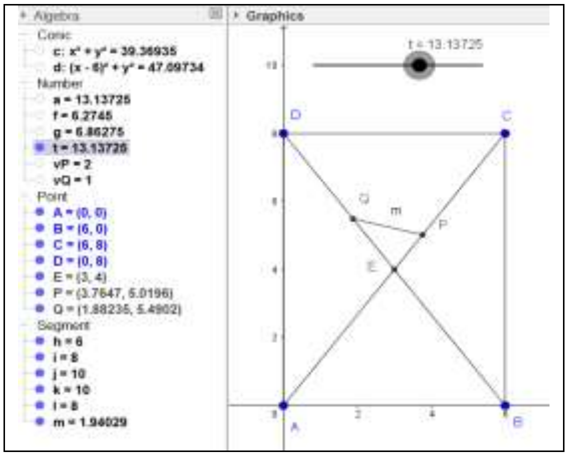
От тази картина се вижда, че е налице периодичност в поведението на кривата. За да намерим минималната стойност на m, е достатъчно да разгледаме случая, когато   t се мени в интервала между 10 и 15. Коригираме плъзгача, като поставим в него за граници на t тези стойности и отново проследяваме как се движи точката S. Така получаваме Фиг. 7. От нея се вижда, че най-малка стойност за m(t) ще се получи, когато t е между 13.1 до 13.3.



Фиг. 7

При по-внимателна работа с плъзгача получаваме, че минимумът за m(t) е 1.94029 и той се получава, когато t = 13.13725. Като разделим 1.94029 на две, виждаме че отворът на тази задача е 0.97 (Фиг. 8).

Повече от половината участници са дали точен отговор на тази задача.



Фиг. 8

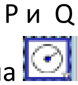
Забележка. В Геогебра има команда за автоматично намиране на стойността t, за която една функция (в случая m(t)) достига минимума си. Това е командата

Minimize(<Dependent Number>, <Free Number>) .

В нашия случай в командния ред трябва да напишем Minimize(m,t). Изпълнението на тази команда вписва в алгебричния прозорец едно ново число a=13.13725 (има го на Фиг. 8). Когато това число се вземе като стойност на t , за m се получава минималната стойност 1.94029.

Задача 3. Най-напред „нагласяме“ скоростта на P. В алгебричния прозорец слагаме vP = 2.7 . Скоростта на другата точка оставяме същата: vQ = 1. Променяме и обхвата на плъзгача, според изискването в условието на задачата - t да се мени от 0 до 40 . Централният въпрос в тази задача е:

Как да направим така, че точката Q да тръгва не от B, а от E, да се движи към D и, след като стигне до D, да започне да осцилира между D и B?

За целта е добре да разберем как е направен помощният файл и, по-точно, как са построени точките P и Q в него. За всеки момент от време t се пресмятат предварително две числа f(t) и g(t). Числото f(t) е разстоянието от A до P в момента t , а g(t) е разстоянието от B до Q в същия момент. Как се пресмятат числата f(t) и g(t), ще обсъдим по-късно. За сега е достатъчно да знаем, че когато t расте, числото f(t) нараства от 0 до 10, след това намалява до 0 и отново започва да расте до 10 и т.н. Т.е. f(t) осцилира между 0 и 10, при това със скорост vP = 2.7 м/минута. Аналогично, когато t расте, g(t) осцилира между 0 и 10, но със скорост vQ = 1 м/минута. С помощта на тези две числа построяваме точките P и Q по следния начин. Построяваме окръжност с център в A и радиус f(t) (чрез бутона ) и намираме точката P като обща точка (пресечница) на тази окръжност и отсечката AC. Аналогично, Q е пресечницата на окръжност, която има център в B и радиус g(t), и отсечката BD. На Фиг. 9 двете окръжности са означени съответно с буквите c и d.

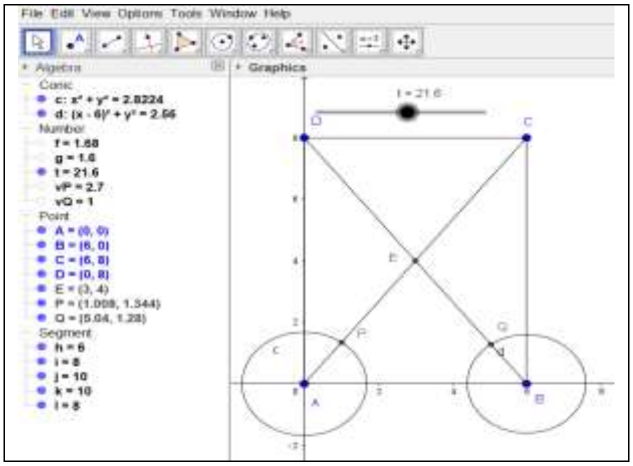
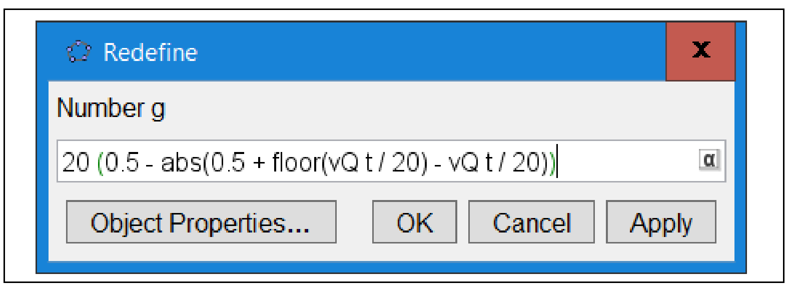


Fig. 9

За да се избегне претрупаност на чертежите, окръжностите c и d са „скрити“ в нашите разглеждания. При скорост vQ = 1 точката Q ще „пристигне“ в E в края на петата минута. Следователно, ако построим точката Q като пресечница на отсечката BD и окръжност с център в B и радиус g(t+5), ще получим онова, към което се стремим: точката Q ще тръгва от E към D и като достигне D, ще започне да осцилира „открай – докрай“ по отсечката DB . Значи е достатъчно във формулата за g(t) dа изменим t с (t+5). Като щракнем два пъти върху g в алгебричния прозорец се получава следния изглед (Фиг. 10):



Фиг.10

В средния продълговат прозорец на Фиг. 10 е записан , на разбираем за Геогебра „език“, начинът на пресмятане на g(t). По-долу ще дадем същия израз като обичайна математическа формула. За нас в момента е важно само това, че променливата t участва два пъти в израза, пресмятащ g . И в двата случая заместваме t с (t+5) и получаваме нов израз, който пресмята g(t+5) (Fig. 11):

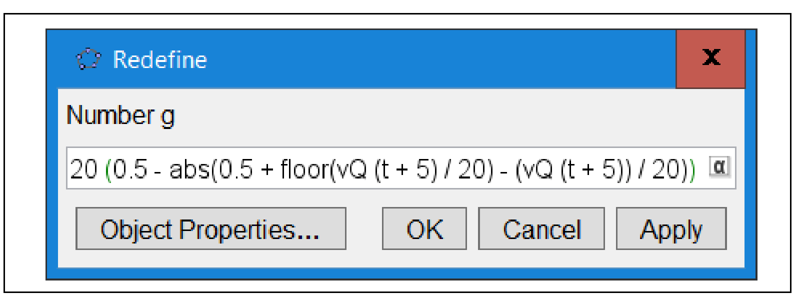
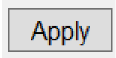
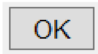
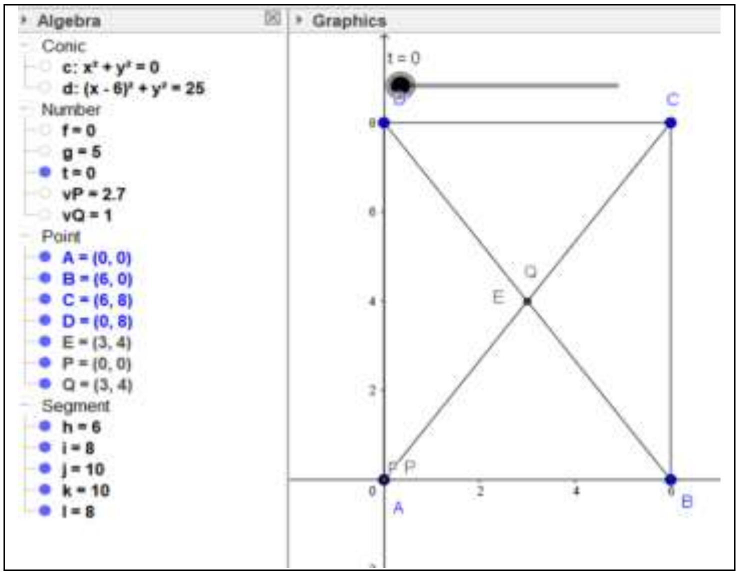


Fig. 11

За да влезе в сила промяната в начина на пресмятане на g(t), щракваме последователно върху 

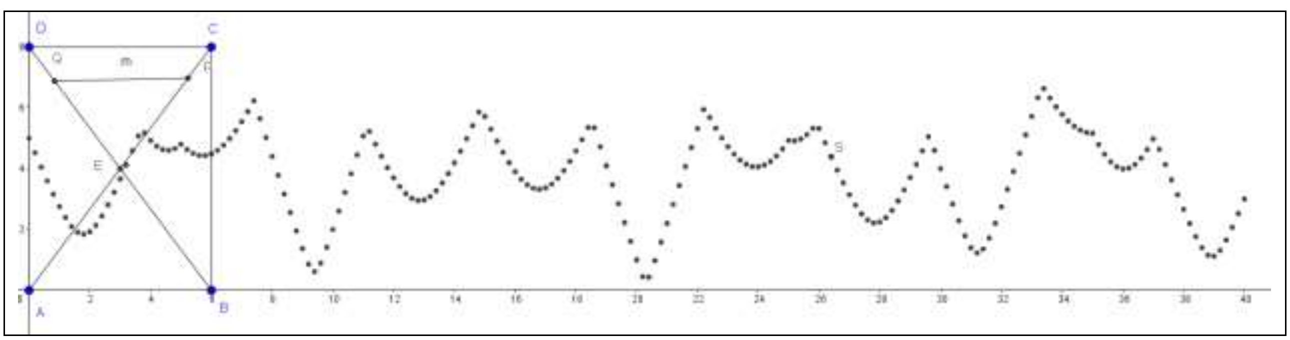
и 

. Получаваме нов помощен файл, който запазваме под името 1802zadacha3.ggb. Можем да работим с него, като щракнем тук. На Фиг. 12 е показано какво „произвежда“ този файл в началния момент t = 0. Вижда се, че точката Q съвпада с E.



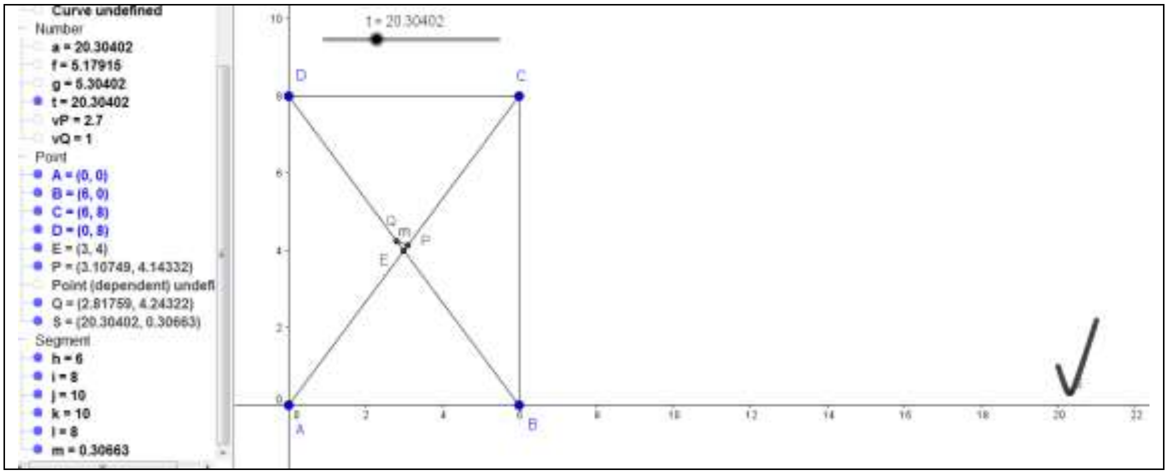
Фиг. 12

По-нататък действаме както в предната задача. Построяваме отсечката PQ . Нейната дължина е означена с m. Отново определяме точка S=(t,m) и проследяваме движението й, когато t се мени между 0 и 40. Резултатът се вижда на Фиг. 13. Тази крива линия ни подсказва, че минимумът



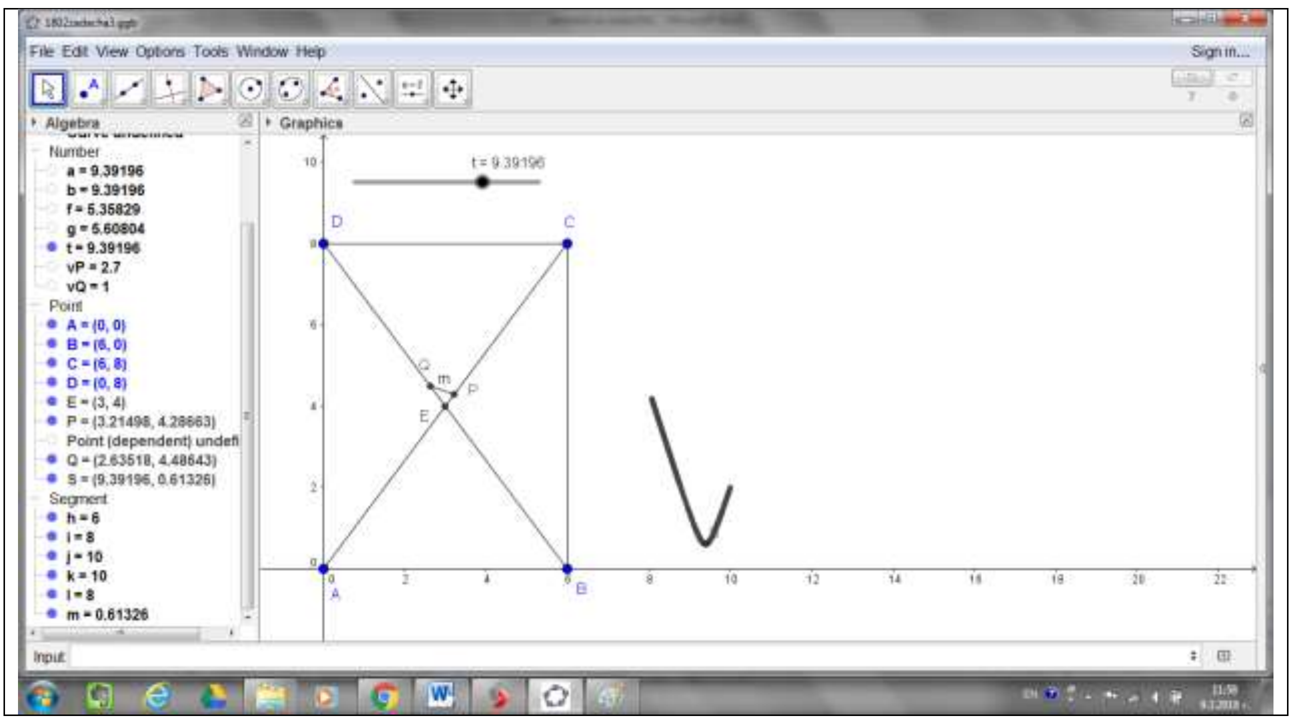
Фиг. 13

следва да се търси в интервалите [8,10] и [19,21]. Като стесним обхвата на плъзгача до интервала [19,21] и боравим внимателно с мишката виждаме, че минимумът за m в този интервал е 0.30663 и че този минимум се достига при t =20.30402. Този резултат може да се получи и с пряко използване на описаната по-горе команда Minimize(m,t) (Фиг. 14).



Фиг. 14

Остава да изследваме какви са стойностите на m , когато t е в интервала [8,10]. Променяме обхвата на плъзгача до [8,10] и използваме командата Minimize(m,t). Резултатът е показан на Фиг. 15. Минимумът за m в този интервал е 0.61526 и се получава при t=9.39196.



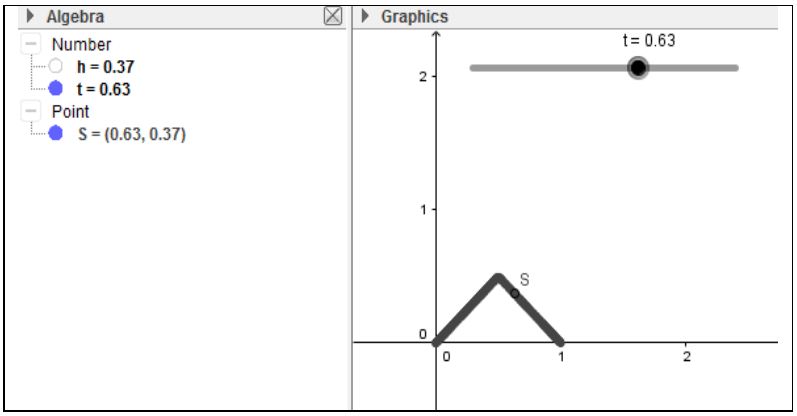
Фиг. 15

Сравняването на минимумите в двата интервала [8,10] и [19,21] показва, че решението на задачата е m = 0.30663. Като отговор на задачата може да се запише числото 0. 31.

Тази задача е затруднила значителна част от участниците. Тя е решена точно от Катерина Костадинова Костадинова, Калоян Юлиянов Цветков, Любомир Мартинов Костов, Пламен Тодоров Иванов и Ани Яворова Динчева. Много добро приближение до отговора е намерено и от Айлин Кемал Али. Добро приближение е посочено и от Теодора Свиленова Стайкова.

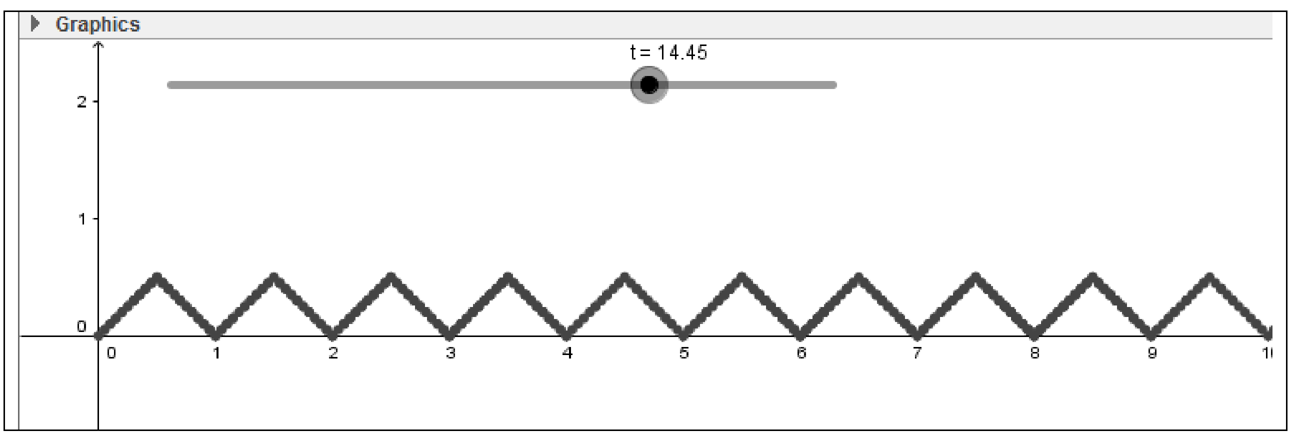
Пресмятане на функциите f(t) и g(t).

Да разгледаме функцията h(t) = $\frac{1}{2} - \left|\frac{1}{2} - t\right|$. Нейното поведение в интервала [0,1] може да се види с помощта на Геогебра . Въвеждаме плъзгач за променливата t и ограничаваме t да е в интервала [0,1]. Записваме h=1/2 – abs(1/2 – t) в командния ред на Геогебра. Командата abs(1/2 – t) е начинът да запишем $\left|\frac{1}{2} - t\right|$ в Геогебра. След това определяме (пак в командния ред) точка S=(t,h). Следата на тази точка, когато t се мени в интервала [0,1] е изобразена на Фиг. 16.



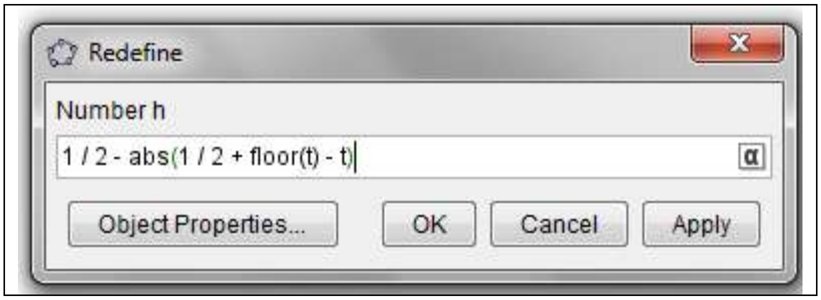
Фиг. 16

Когато t расте от 0 до $\frac{1}{2}$, h също расте от 0 до $\frac{1}{2}$. Когато t продължи да расте (от $\frac{1}{2}$ до 1), h намалява от $\frac{1}{2}$ до 0. За нас е важно това „осцилиращо поведение“ на h да се повтаря и когато t > 1, както е на Фиг. 17



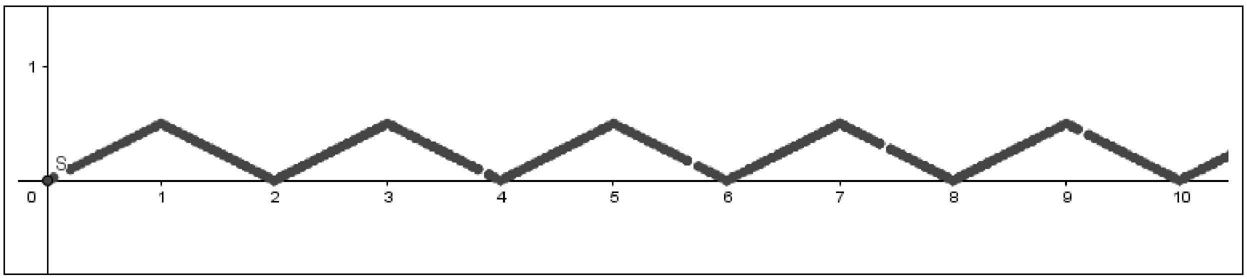
Фиг. 17

Това се постига, като разгледаме функцията h(t) = $\frac{1}{2} - \left|\frac{1}{2} - \{t\}\right|$ в по-широк интервал за t (да речем в [0,20]). В тази формула чрез $\{t\}$ е означена „дробната част на t“. Т.е. $\{t\}$ се получава, като от t извадим $\lfloor t \rfloor$ - най-голямото цяло число, което е по малко или равно на t. Пресмятането на $\{t\} = t - \lfloor t \rfloor$ с Геогебра става с командата t – floor(t) . Ето как е записана функцията $\frac{1}{2} - \left|\frac{1}{2} - \{t\}\right|$ във файла osciliranedo20.ggb , който произвежда Фиг. 17:



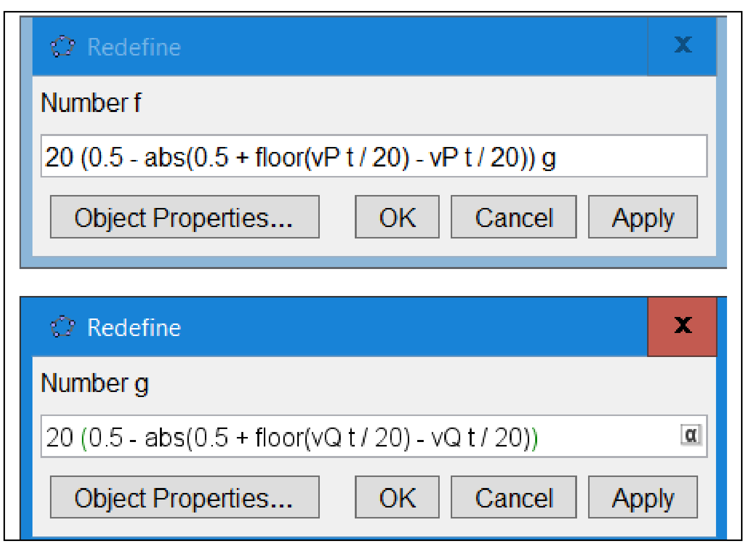
Фиг. 18

Ако искаме „по-разкрачено“ осцилиране (например, точките, в които h става нула, да са два пъти по-нарядко) трябва във формулата за h да заменим t с t/2. Ето до какво води това:



Фиг. 19

Ако искаме една пълна осцилация да става в интервал от време k, трябва във формулата за h да заменим t с t/k. В задача 3 точката P осцилира по диагонала AC със скорост vP. Тя изминава пътя от A до C и обратно до A за време 20/vP и това следва да е интервалът от време между две последователни анулирания на функцията f(t). Значи, за да добием такава периодичност, трябва във формулата за h да заменим t с „t делено на 20/vP”, което е все едно да заменим t с vP t/20. След такава замяна остава да направим само още една крачка. Да умножим h по 20, за да имаме осцилация не от 0 до ½, а от 0 до 10. Същите разсъждения са валидни и за точката Q. Фиг. 20 показва как са определени f и g в помощния файл 1802.ggb:



Фиг. 20

В обичаен запис формулите за f(t) и g(t) изглеждат така:

$$f(t) = 20\left(\frac{1}{2} - \left|\frac{1}{2} + \left\lfloor\frac{tvP}{20}\right\rfloor - \frac{tvP}{20}\right|\right)$$

$$g(t) = 20\left(\frac{1}{2} - \left|\frac{1}{2} + \left\lfloor\frac{tvQ}{20}\right\rfloor - \frac{tvQ}{20}\right|\right).$$

Разбира се, Геогебра предлага и други способи за реализиране на осцилиращо движение. Избраният по-горе способ е най-близък до традиционната математика.

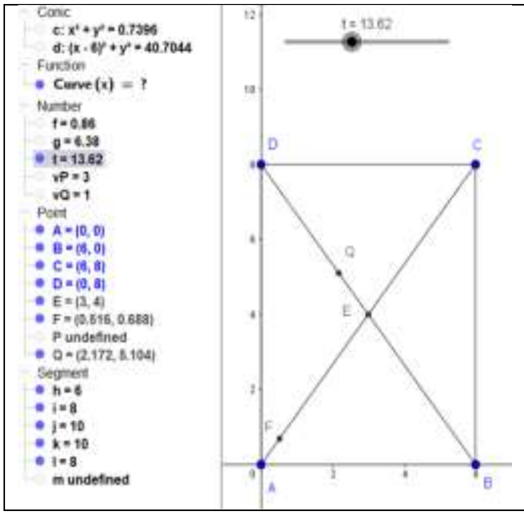
Заключителни бележки.

1.Използваният в тази тема помощен файл 1802.ggb има известни недостатъци. Точката P не е еднозначно определена, когато f = 0. Например, в долния ляв ъгъл на Фиг. 12, освен P, се появява и една нова точка F, която липсва в алгебричния прозорец. От конструкционния протокол (Фиг. 21) се вижда, че F и P са под един и същ номер, 17, като и двете са пресечната точка на отсечката j=AC и окръжността c, която е с център в A и има радиус 0 в този случай.

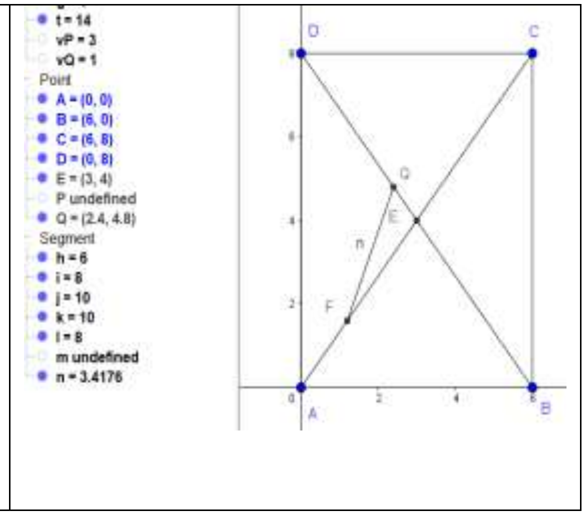
	16	Circle c	Circle with center A and radius f	c: $x^2 + y^2 = 0$
→	17	Point P	Intersection point of c, j	P = (-0.00001, -0.00001)
	17	Point F	Intersection point of c, j	F = (0.00001, 0.00001)
	18	Circle d	Circle with center B and radius g	d: $(x - 6)^2 + y^2 = 44.44449$

Фиг. 21

Нещо повече, координатите на P са отрицателни, което не се съгласува с даденото определение за P (като точка от AC). При промяна на t (чрез плъзгача) точката P може да изчезне (Фиг. 22). В алгебричния прозорец тя е обявена за „недефинирана“ (undefined). Отсечката   PQ също е изчезнала и срещу числото m стои „undefined“.Затова пък двойникът F започва да изпълнява ролята на P и можем да продължим работата по задачата с него като построим отсечката QF (Фиг. 23). Аналогична картина се получава и за онези моменти от време t, когато Q попада в B. Тогава се появява „двойник“ G на точката Q .



Фиг. 22



Фиг. 23

Тези затруднения са породени от особеностите на Геогебра и от това, че работим с изродени окръжности с радиус нула. Можем да избегнем този ефект, ако определим точките P и Q пряко с техните координати, а не чрез спомагателните окръжности c и d. В координатен вид, от съображения за подобие с триъгълника ABC, точката P се записва така P=(0.6f, 0.8f). Аналогично, за точката Q в координатен вид получаваме Q=(6 – 0.6g, 0.8g). Помощен файл с такова определяне на P и Q може да се намери тук (nowpomoshtenfajl.ggb). При него описаните по-горе нееднозначности не възникват.

2. Идеята за тази тема е на Николай Николов и Петър Кендеров. В нейното обсъждане се включиха Ивайло Кортезов и Тони Чехларова. Отговорността за окончателното формулиране на темата, описанието на решенията и подготовката на използваните помощни файлове е на Петър Кендеров. Логото на темата е направено от Койя Чехларова. Уеб-поддръжката и техническото осигуряване са на Тодор Брънзов и Георги Гачев.