

Добри практики в образованието
по математика и ИТ
за развиване на
ключови компетентности



Тони Чехларова, Евгения Сендова
(редактори)



Lifelong
Learning
Programme

Comenius Multilateral Project: Developing Key Competences by Mathematics Education Project
(Развиване на ключови компетентности чрез математическото образование)

www.KeyCoMath.eu

Редактори: Тони Чехларова, Евгения Сендова
Художник на корицата: Калина Сотирова
Графично оформление: Калина Сотирова

Издателство Макрос © 2015
ISBN 978-954-561-389-0

Проектът *KeyCoMath* е финансиран със съдействието на програма "Учене през целия живот" на Европейския съюз. Настоящият сборник отразява само личните виждания на авторите. Европейската комисия и Изпълнителна агенция за образование, аудиовизия и култура не носят отговорност за използването на информацията в сборника.



СЪДЪРЖАНИЕ

Увод	4
Ангелова, Р. Паркетиране на равнината или диалози на математиката с изкуството	7
Браухле, М. Всичко започна с едно стихотворение и завърши с много усмивки	12
Вълкова, Д. Визуални феномени - интерактивно приложение на динамичен софтуер в училище	16
Зарева, Ц. Сечения и сенки с AutoCAD в дескриптивната геометрия	22
Илиева, Р. Моделиране на калейдоскоп	29
Кокинова, С. Предизвикателства в четириъгълник или експерименти по математика – защо не!	32
Коцева, М. Интерактивност чрез Excel	36
Кунчева, Д. С мишка в ръка	41
Куюмджиева, Б. Така го усещам	46
Пенчева, Г. Малките математици опазват природата	50
Петков, И. За общуването и изследователския подход в часовете по ИТ	55
Стефанова, Е. Всичко започна с триъгълника на Паскал	61
Стоянова, Н., Раданов Р. Как да използваме остатъка при деление	67
Христозова, Н. Геометрия и моден дизайн	72
Цветкова, Н. Динамична математика с <i>GeoGebra</i>	75
Цвятков, Д. Симетричните функции в помощ на физичните явления	78
Gortcheva, I. Visualizing mathematical word problems	83



Визуални феномени - интерактивно приложение на динамичен софтуер в училище

Даринка Вълкова

valkova_darina@abv.bg

ПМГ "Нанчо Попович" - Шумен

Резюме: В настоящата статия представяме изследване с различни динамични софтуерни продукти, чрез които могат да бъдат реализирани занимателни изображения, поставящи на изпитание нашите възприятия. Динамичният софтуер позволява да се експериментира с движението на обектите, взаимното им разположение и цветовете, което би могло да допринесе за развиването на различни ключови компетентности.

Ключови думи: *изследователски подход, динамичен софтуер, дигитална компетентност*

1. Увод

Визуалните феномени са предмет на изключителен интерес от дълбока древност до наши дни. Те са около нас и будят човешкото ни любопитство. Причините са в желанието ни да опознаем себе си и света около нас. Психологията е сравнително млада наука и изследванията ѝ се базират предимно на материали от други научни области. Остават неизучени много проблеми, а един от най-важните е как възприемаме обозримия свят и нашето място в него.

В секциите с проекти на *GeoGebra* и *Wolfram Mathematica* има немало материали, свързани с оптическите илюзии, но тази област е толкова обширна и в същото време е с неспиращ интерес от страна на хората, че трудно би могла да бъде изчерпена. Наименованието "Оптически илюзии" е заменено с "Визуални феномени" в настоящото изследване по ред причини.

Това не са илюзии, защото всичко представено съществува и не е резултат от човешки несъвършенства, а просто са феномени, които възприемаме с нашите сетива. Възприемаме ги визуално, резултатът зависи от нашата възраст, заобикалящата среда, времето, в което сме родени. Както няма двама души с едни и същи отпечатащи, така и спецификата на зрителната система определя уникалност на възприемането на света около нас.

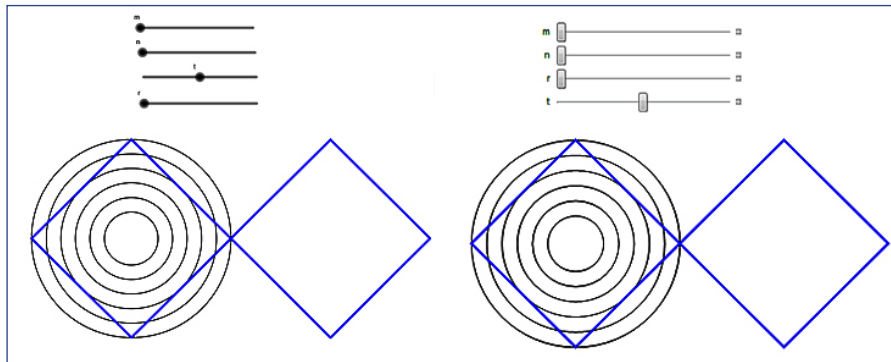
Изследването е насочено основно към аналогията на два продукта - *GeoGebra* и *Wolfram Mathematica*, както и представянето на изображенията чрез *PowerPoint*, с използване на *Visual Basic for Applications (VBA)*.

2. Феномените и динамичните софтуери

Паралелното използване на двата динамични софтуера *GeoGebra* и *Wolfram Mathematica* е интересна задача и предизвикателство. В същото време резултатите могат да се представят с *PowerPoint*, където можем да използваме VBA. Комбинацията от време, движение, цветове и т.н., в резултат на което да се получат атрактивни изображения, провокира използването на изследователския подход. Идеята да се използват *GeoGebra* и *Wolfram Mathematica* е съвсем логична - те предлагат много възможности. *GeoGebra* е безплатен софтуер, а *Wolfram Mathematica* е лицензирана и изисква заплащане, но има и безплатна версия: *Wolfram Mathematica - Alfa*.



Едни от най-популярните зрителни изкривявания са представени на Фигура 1.



Фигура 1. Зрителни изкривявания, реализирани на *GeoGebra* (ляво) и *Wolfram Mathematica* (дясно)

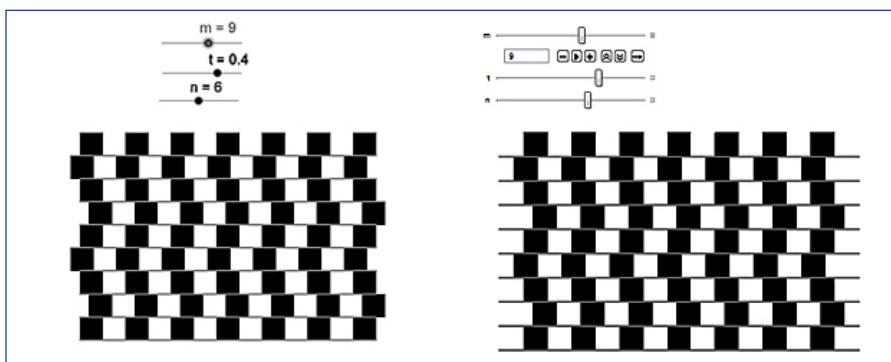
Във *Wolfram Mathematica* можем да създадем обектите чрез `Table`:

```
s = N[(1/2 - Sqrt[2]/4)/2];
Manipulate[ Graphics[{Table[Table[Table[{Black, Circle[{a, b}, 1/2 - i*s]}, {i,
0, 5, 1}], {a, 1, m}], {b, 0.5, n}], Table[Table[{Thick, RGB[0.05,0.00,0.95],
Line[{{1 + i, 0 + j}, {1.5 + i, 0.5 + j}, {1 + i,1 + j}, {0.5 + i, 0.5 + j},
{1 + i, 0 + j}]}], {i, 0, t}], {j, 0, r} ]}], {{m, 1, "m"}, 1, 3, 1}, {{n, 0.5,
"n"}, 0.5, 2.5, 1}, {{r, 0, "r"}, 0, 2, 1}, {{t, 0, "t"}, 0, 2, 1}]
```

За създаване на обектите в *GeoGebra*, използваме `Sequence`:

```
s = (1/2 - Sqrt(2)/4)/2;
Sequence[Sequence[Sequence[Circle[(a, b), 1 / 2 - i s], i, 0, 5, 1], a, 1, m],
b, 0.5, n] Sequence[Sequence[Polygon[(1 + i, 0 + j), (1.5 + i, 0.5 + j), (1 + i,
1 + j), (0.5 + i, 0.5 + j)], i, 0, t], j, 0, r]
```

Феноменът „Кафене“ (Фигура 2) е забелязан от професор Грегъри в любимото му кафене в Бристол, където стенните плочки са били подредени по доста нестандартен начин.



Фигура 2. Феноменът Кафене, реализиран на *GeoGebra* и *Wolfram Mathematica*

Основният фактор са сивите контури, които обхващат редовете и черните квадратчета¹.

В *PowerPoint* е необходимо да се придвижват съвкупността от бели и черни квадратчета, както са обединени на ивици.

¹ Бел.ред. Да отбележим, че фигурата *Кафене* е описана за първи път като Kindergarten illusion през 1898 и бива преоткрита от Грегъри през 1973 г. Използвана е в Учебното помагало по ИТ за 5. клас Компютърът в моя свят (изд. Анубис) като задача от темата „Създаване и обработка на графично изображение“.

За тази цел може да се използва макросът *DragandDrop* (VBA), който да приплъзва хоризонтално ивиците. *Кафене* може да се реализира с *GeoGebra* чрез:

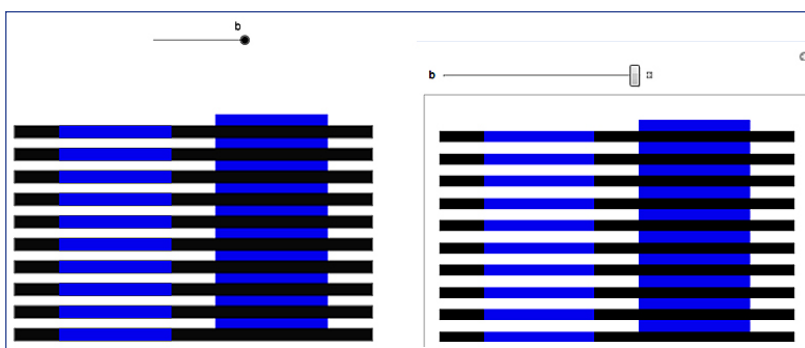
```
Sequence[Segment[(0, a), Point[Circle[(0, a), 2n + 1]]], a, 0, m - 1]
Sequence[Sequence[Polygon[(2b + t sin(4π / 8a), a), (2b + t sin(4π / 8a) + 1, a),
(2b + t sin(4π / 8a) + 1, a + 1), (2b + t sin(4π / 8a), a + 1)]
Sequence[Sequence[Polygon[(2b + t sin(4π / 8a), a), (2b + t sin(4π / 8a) + 1, a),
(2b + t sin(4π / 8a) + 1, a + 1), (2b + t sin(4π / 8a), a + 1)], a, 0, m - 1], b, 0, n]
Number
t, -1, 1, 0.1
n, 2, 10, 1
m, 2, 14, 2
```

Реализацията на изображението на *Wolfram Mathematica* е аналогично и `Table` се дефинира като `List` в *GeoGebra*.

В двата софтуера промяната на броя редове става чрез плъзгача *m*, увеличаването и намаляването на броя квадратчета на един ред - чрез плъзгача *n*, а *t* е плъзгач за хоризонталното приплъзване. В *GeoGebra* движенията се декларират с `Number`, а във *Wolfram Mathematica* още в началото се поставя `Manipulate`.

```
Manipulate[Graphics[{
  EdgeForm[{AbsoluteThickness[2], Gray}], AbsoluteThickness[3],
  Table[Rectangle[{a + t Sin[4 π/8 b], b}, {a + t Sin[4 π/8 b] + 1,
    b + 1}], {a, 1, 2 n - 1, 2}, {b, 0, m - 1}],
  Gray, Line[Table[{{0, b}, {2 n + 1, b}}, {b, 0, m - 1}]],
  ImageSize -> {500, 400}],
  {{t, 0.4, "t"}, -1, 1}, {{n, 7, "n"}, 2, 10, 1}, {{m, 8, "m"}, 2, 14, 1}]
```

Подобна задача може да бъде решена и за друго атрактивно изображение - това на Мюнкер (Фигура 3). Феноменът тук се разкрива чрез възприемането на цветовете и хоризонталното приплъзване на черни ивици [4].



Фигура 3. Изображението на Мюнкер, реализиран на *GeoGebra* и *Wolfram Mathematica*

В *GeoGebra* създаваме три редици, първата от които изобразяват черните ивици, а вторите две - двете колони цветни ивици. Чрез плъзгача *b* променяме дължината на черните ивици.

```
Sequence[Polygon[(0, 0 + 2i), (b, 0 + 2i), (b, 0 + 2i + 1), (0, 0 + 2i + 1)],
i, 0, 9]
Sequence[Polygon[(4, 2i), (14, 2i), (14, 2i + 1), (4, 2i + 1)], i, 0, 9]
```

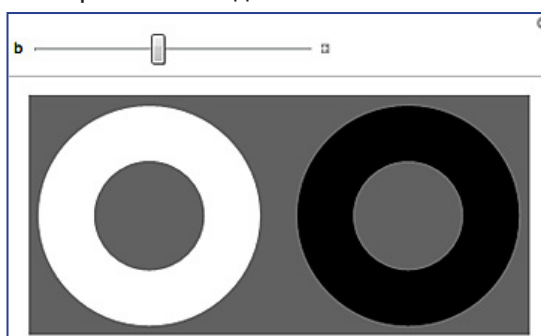
```
Sequence[Polygon[(18, 2i + 1), (28, 2i + 1), (28, 2i + 2), (18, 2i + 2)], i, 0, 9]
```

Във Wolfram Mathematica отново се създават трите списъка от данни.

```
Manipulate[
Graphics[{Black, Table[Rectangle[{0, i}, {b, i + 1}], {i, 0, 18, 2}],
RGBColor[0.05, 0.00, 0.95],
Table[Rectangle[{4, i}, {14, i + 1}], {i, 0, 18, 2}],
Table[Rectangle[{18, i}, {28, i + 1}], {i, 1, 19, 2}], PlotRange -> {{0, 32},
{0, 21}}],
{{b, 32, "b"}, 0, 32}]
```

Друг феномен, който илюстрира казаното дотук, е този на *светещите кръгове*.

В *GeoGebra* (Фигура 4) особеност е работата с динамичността на цветовете, а във *Wolfram Mathematica* реализацията се извършва по следния начин:



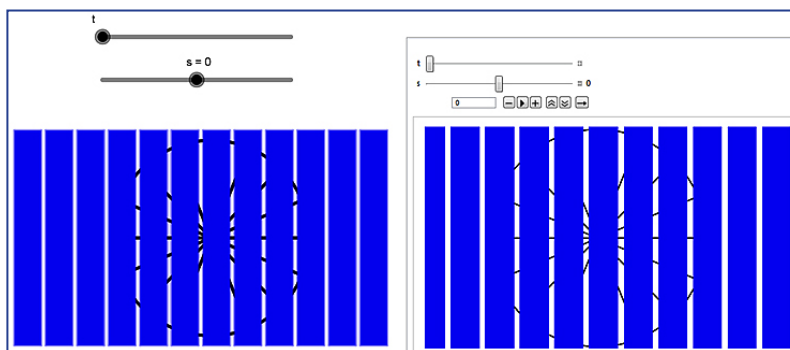
Фигура 4. Светещите кръгове, реализирани във Wolfram Mathematica

```
Manipulate[
Graphics[{White, Disk[{0, 0}, 6], GrayLevel[t], Disk[{0, 0}, 3], Black,
Disk[{14, 0}, 6], GrayLevel[t], Disk[{14, 0}, 3]}, PlotRange -> Automatic,
Background -> Gray],
{{t, 0.5}, 0.1, 1, 0.1}]
```

Плъзгачът променя цвета на вътрешния кръг от бяло до черно и чрез неговата скорост се осъществява атрактивността на изображението.

При преминаването на колело зад ограда (или „палисада“, както е наречена в [5], спиците му се виждат по особен начин зад процепите на оградата вследствие на движението на очите (Фигура 5).

Те се възприемат начупени и изкривени, в зависимост от посоката на движение. Благодарение на



Фигура 5. Феноменът на Роже, реализиран на GeoGebra и Wolfram Mathematica

паразитните образи, които се създават, се получават изображения с изкривени форми. Това може да бъде забелязано, дори когато палисадата не се движи. При движение се наблюдава феномена на Погендорф [6], при който спиците “се начупват” (Фигура 5) при преминаване през палисадата [7].

В *GeoGebra* колелото със спиците се получава чрез командата:

```
Sequence[Segment[(10, 0), (10 + 5cos(t + i π / 8), 5sin(t + i π / 8))], i, 1, 16, 1]
```

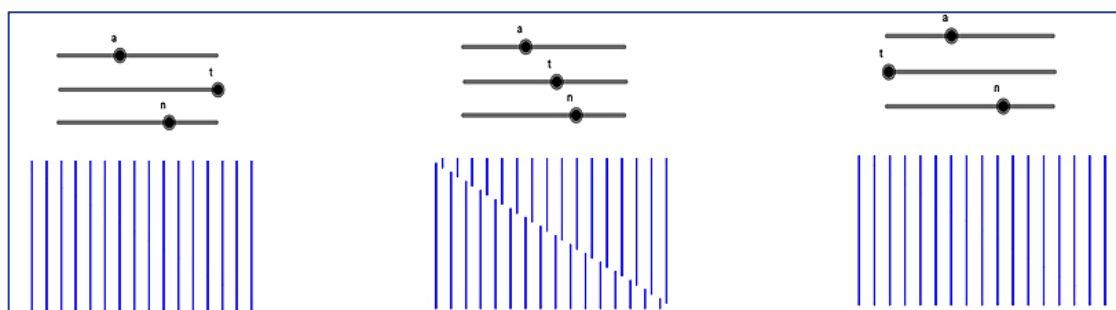
“Палисадата” се получава чрез командата:

```
Sequence[Polygon[Mod[i + s t / (2π), 19.3], -5), (1.35 + Mod[i + s t / (2π), 19.3], -5), (1.35 + Mod[i + s t / (2π), 19.3], 5), (Mod[i + s t / (2π), 19.3], 5)], i, 0, 17.6, 1.6]
```

Съществуват и два плъзгача *s* и *t*, чрез които се извършва движението на колелото и оградата и тяхната скорост.

Известни са ни много геометрични парадокси, които започват с разрязване на фигура на части и от тях се съставят нови фигури. Този принцип е наречен “Принцип на скритото преразпределение” [8]. След преместването на плъзгача се “появява” още една линия (Фигура 6).

Използваме трансляция чрез плъзгач, за да получим ново изображение, в което броят на сините



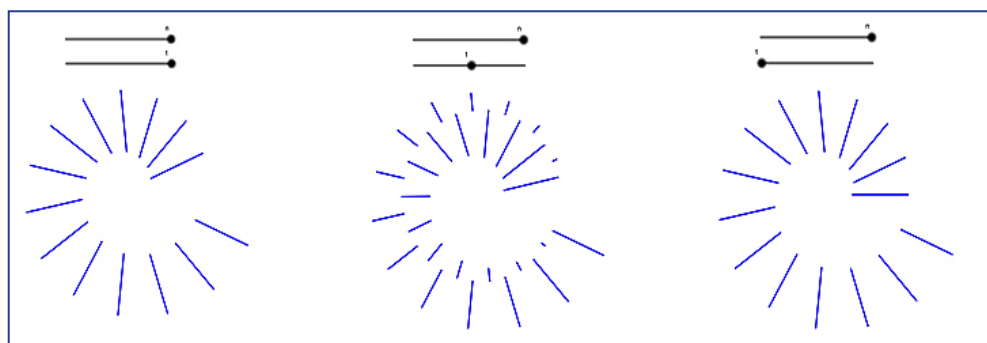
Фигура 6. Появяващи се и изчезващи линии чрез трансляция, реализирани на *GeoGebra*

линии се е увеличил с една. В *GeoGebra* линиите са реализирани чрез:

```
Sequence[Segment[((i - 1) / (n - 1), 0), ((i - 1) / (n - 1), a / (n - 1) (n - i))], i, 1, n - 1]
```

```
Translate[Sequence[Segment[((i - 1) / (n - 1), a), ((i - 1) / (n - 1), a / (n - 1) (n - i))], i, 2, n], Vector[t ((-1) / (n - 1), a / (n - 1))]]
```

В следващото изображение (Фигура 7) е използвана ротация и отново линиите са се увеличили с една вследствие на трансформацията.



Фигура 7. Появяващи се и изчезващи линии чрез ротация, реализирани на *GeoGebra*

В *GeoGebra* линиите са реализирани чрез:

```
Sequence[Segment[(cos(i 2 π / n), sin(i 2 π / n)), ((1 + 0.05i) cos(i 2 π / n),
(1 + 0.05i) sin(i 2 π / n))], i, 1, n - 1]
```

```
Rotate[Sequence[Segment[(cos(i 2 π / n), sin(i 2 π / n)), ((1 - 0.05 (n - 1) +
0.05i) cos(i 2 π / n), (1 - 0.05 (n - 1) + 0.05i) sin(i 2 π / n))], i, 0, n - 2],
2π / n t, (0, 0)]
```

3. Заключение

В училище настоящото изследване може да послужи за обучение в часовете по психология в 9. клас, по информационни технологии чрез съчетаването на различни възможности на програмите, с които са осъществени изображенията, по биология и здравно образование под формата на интерактивна игра, в часа на класа, за различни ролеви игри. По този начин се стимулира използването на изследователския подход в учебните часове и учениците активно участват в тях.

Основната идея е да се създадат паралелни реализации на един и същи феномен на трите продукта - *PowerPoint*, *GeoGebra*, *Wolfram Mathematica*. Задачата изглежда трудна, но учениците, увлечени в "играта на мозъка", могат да изследват обектите и в същото време да разширят дигиталната си компетентност и уменията си за представяне на идеи и резултати от работата си по проект [9].

Някои от визуалните феномени бяха реализирани и от петокласници. Те се забавляваха, докато работеха. Вместо светещи кръгове бяха направени очи на човече, което мига; бяха поставени на географска карта местата, обитавани от пингвини, и ред други невероятни идеи. По-големи ученици "преоткриха" някои от възможностите на *GeoGebra*, а някои дори експериментираха на *Wolfram Mathematica*, което за пореден път събуди техния изследователски дух.

Литература

1. Кендеров, П. (2010) Иновации в математическото образование: Европейските проекти *Innomathed* и *Fibonacci*, Математика и Математическо образование, т. 39, с. 63–72
2. Чехларова, Т. (2012) Геометрични фигури – изследвания с динамични конструкции. Макрос. http://www.math.bas.bg/omi/Fibonacci/docs/book-geom_figuri.pdf
3. Кендеров, П., Сендова, Е., Чехларова, Т. (2014) Развиване на ключови компетентности чрез образованието по математика: Европейският проект *KeyCoMath*. Математика и математическо образование, т. 43, с. 99–105
4. Munker illusion, <http://www.michaelbach.de/ot/lum-white/index.html> (последно посещение 01.09.2015)
5. Roget's 'Palisade' Illusion, <http://www.michaelbach.de/ot/mot-Roget/index.html> (последно посещение 01.10.2015)
6. Poggendorf illusion, <http://www.michaelbach.de/ot/ang-poggendorff/index.html> (последно посещение 26.08.2015)
7. Roget, P. M., Explanation of an Optical Deception in the Appearance of the Spokes of a Wheel Seen through Vertical Apertures, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Vol. 115 (1825), pp. 131-140
8. Гарднер, М. (1986) Математически чудеса и тайни, Издателство "Наука", Москва, 1986, с. 73 - 74
9. Nikolova, N., Stefanova, E., Sendova, E., (2011) Op Art or the Art of Object-Oriented Programming. Proc. 5th International Conference on Informatics in Schools: Situation, Evolution and Perspectives (ISSEP 2011), p. 26-29

