

Добри практики в образованието  
по математика и ИТ  
за развиване на  
**ключови компетентности**



Тони Чехларова, Евгения Сендова  
(редактори)



Lifelong  
Learning  
Programme

Comenius Multilateral Project: Developing Key Competences by Mathematics Education Project  
(Развиване на ключови компетентности чрез математическото образование)

[www.KeyCoMath.eu](http://www.KeyCoMath.eu)

**Редактори:** Тони Чехларова, Евгения Сендова  
**Художник на корицата:** Калина Сотирова  
**Графично оформление:** Калина Сотирова

Издателство Макрос © 2015  
ISBN 978-954-561-389-0

Проектът *KeyCoMath* е финансиран със съдействието на програма "Учене през целия живот" на Европейския съюз. Настоящият сборник отразява само личните виждания на авторите. Европейската комисия и Изпълнителна агенция за образование, аудиовизия и култура не носят отговорност за използването на информацията в сборника.



# СЪДЪРЖАНИЕ

|  |    |
|--|----|
| Увод   | 4  |
| Ангелова, Р. Паркетиране на равнината или диалози на математиката с изкуството           | 7  |
| Браухле, М. Всичко започна с едно стихотворение и завърши с много усмивки                | 12 |
| Вълкова, Д. Визуални феномени - интерактивно приложение на динамичен софтуер в училище   | 16 |
| Зарева, Ц. Сечения и сенки с AutoCAD в дескриптивната геометрия                          | 22 |
| Илиева, Р. Моделиране на калейдоскоп   | 29 |
| Кокинова, С. Предизвикателства в четириъгълник или експерименти по математика – защо не! | 32 |
| Коцева, М. Интерактивност чрез Excel   | 36 |
| Кунчева, Д. С мишка в ръка   | 41 |
| Куюмджиева, Б. Така го усещам  | 46 |
| Пенчева, Г. Малките математици опазват природата   | 50 |
| Петков, И. За общуването и изследователския подход в часовете по ИТ                      | 55 |
| Стефанова, Е. Всичко започна с триъгълника на Паскал                                     | 61 |
| Стоянова, Н., Раданов Р. Как да използваме остатъка при деление                          | 67 |
| Христозова, Н. Геометрия и моден дизайн  | 72 |
| Цветкова, Н. Динамична математика с <i>GeoGebra</i>                                      | 75 |
| Цвятков, Д. Симетричните функции в помощ на физичните явления                            | 78 |
| Gortcheva, I. Visualizing mathematical word problems                                     | 83 |



## Паркетиране на равнината или диалози на математиката с изкуството

Румяна Ангелова

antika\_rumi@abv.bg

ПГИМ, Пазарджик

ИМИ-БАН

**Резюме:** Статията представя изучаването на проблема „паркетиране на равнината“ като проект, реализиран чрез класна и извънкласна работа в Професионална гимназия по икономика и мениджмънт, гр. Пазарджик. Описани са различни форми на работа – динамична математика, учене чрез театър, пърформанс, панаир на природните науки, с които се повишават математическата и дигиталната компетентност на учениците, техния усет за инициатива и се изгражда подобаващо отношение към културата и изявяването.

**Ключови думи:** паркетиране на равнина, учене чрез театър, изследователска задача, математическа компетентност, дигитална компетентност, усет за инициатива, отношение към културата и изявяването

### 1. Увод

Организирали ли сте някога изучаването на сериозен математически проблем чрез творчески драматични дейности? Ако е така, как успяхте да предизвикате интереса на учениците, да ги мотивирате, да организирате актьорски дейности? Как проведохте обучителните събития? Оправдаха ли се очакванията – вашите и на учениците? Отпаднаха ли предварителните ви страхове? Какви възможности получават учениците, практикувайки директно актьорско майсторство, когато изучават или описват математически сюжет? Това са въпроси, които ме вълнуват и търся отговора в преподавателската си дейност. По-долу споделям няколко практики, които могат да ви бъдат от полза.

### 2. Паркетиране на равнина

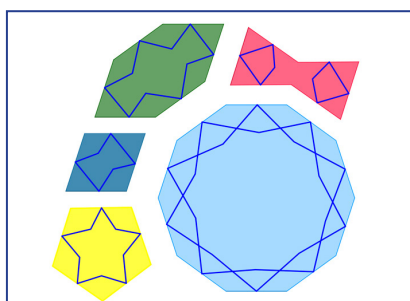
Навсякъде около нас има изобилие от мозайки, паркетни, плочници, зидарии, облицовки, тапети, платове и покривала от всякакъв тип с десени върху тях, в които са вложени математически идеи. Те съдържат мотиви, които се повтарят през равни интервали или са получени чрез завъртане. Напълно естествено е да се насочи вниманието на учениците към откриване на начина на получаването на различните мозайки и достигане до извода, че всъщност мотивите са подложени на геометрични преобразувания, които се изучават по математика в осми клас. Уточнява се, че периодични мозайки са такива, които покриват равнината само чрез транслиране на определен елемент (модул), без ротация и осева симетрия. Непериодични мозайки се получават чрез ротация или осева симетрия и при тях липсва елемент, който може да покрие цялата равнина само с трансляция. Сега вече сме готови да стартираме проекта „Паркетиране на равнината“ [1].

Важен момент за успешността на този проект е поставянето на предварителни изследователски задачи. Те помагат на учениците по естествен начин „да влязат“ в проблема. Чрез насочващи въпроси учителят по математика възлага така любимото за всички ученици търсене в мрежата. След изследването учениците оформят галерия от образци на природни мозайки.

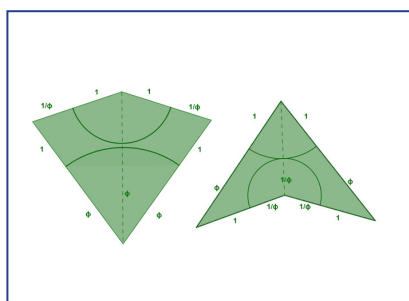
Споделят, че е забавно сами да открият математическите модели - мозайки при пчелна пита, кожа на риба, кожа на боа, кора на дърво, шарки на жираф, крокодил, слон, опашка на паун, напукана земя и какви ли още не. Освен природните мозайки галерията се допълва със снимки на паркетни и стени от дворци, християнски и ислямски храмове. Въз основа на търсенето учениците формират хипотези за вида фигури, които могат да покрият равнината периодично и неперидично, предоставят доказателствен материал към тях. Дискутираме въпроси от типа: А дали има набор от фигури, които могат да покрият равнината само неперидично? От колко най малко фигури се състои този набор? Интересни въпроси, водещи след себе си интригуващи сценарии за чертежи, открити в древни папируси, за мозайки в дворци, за романтични истории на изследователи, търсещи красотата и хармонията в произведенията на старите майстори.

### 3. Учене чрез театър - какво е това?

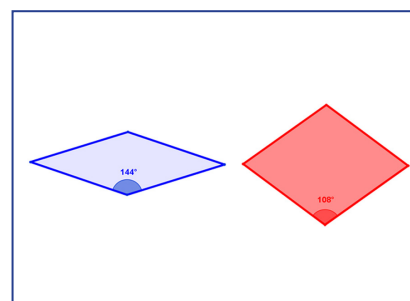
Предложихме на учениците от VIII „а“ и VIII „б“ клас да паркетираме равнината по време на *математически* пърформанс [2], който организирахме и проведохме, интегрирайки математиката и изкуството. Така го и нарекохме – „Диалози на математиката с изкуството“. Как го осъществихме? Учителят по литература направи въведение за ислямските мозайки не просто като форма на изкуство или занаят, а и като форма на поклонение и духовно преживяване през вековете. Бяха представени мозайки от Алхамбра [3], мавърски дворец в Гранада, построен около 1300 г. Учителят по математика водеше пътешествието в математически контекст – изследвахме мозайки с най-малко 13 от 17-те възможни групи на симетрия. Последва запознаване с набора от пет плочки – наречени *girih* (Фигура 1), които украсяват в периодични и неперидични конфигурации стените на ислямски храмове и обществени сгради. За авторите им четем в [4]: „Това е абсолютно зашеметяващо. Те са създали мозайки, които са толкова сложни, че отразяват математика, която ние не сме могли да разберем до неотдавна“. Учениците активно участваха с допълнения и коментари, формирани при реализиране на търсенето в мрежата. Учителят по математика постави въпроса за двете двойки плочки, за които професор Роджър Пенроуз доказва, че могат да покрият равнината, създавайки неперидични модели: „стрела“ и „хвърчило“ (Фигура 2) и два типа ромбове - „тесен“ и „широк“ (Фигура 3) [5].



Фигура 1. Плочките "Girih"



Фигура 2. "Стрела" и "Хвърчило"



Фигура 3. "Тесен" и "широк ромб"

Интересен момент е да се открие връзката между двата типа мозайки на Пенроуз и златното сечение  $\phi$ . Запознаването с красиви образци на мозайките, важни и определящи за визуалния ритъм при паркетирането на равнина, има за цел да надгради математическата компетентност на учениците и да провокира усета им към културата и изявяването [5]. В хода на пърформанса учителите по математика и литература организират следните творчески дейности:

- Канят и мотивират учениците да създадат истории, насочват ги, отбелязват важността на слушането, на речника, на движенията;
- Предлагат на учениците да изразят "историите" в кратки етюди чрез телата си и чрез шаблоните на паркетиращите плочки;
- Насърчават учениците да изразят собствените си чувства, преживявания и впечатления чрез драматични дейности и да създадат театрални етюди. Това помага да се осигури по-добро разбиране на собствените чувства и тези на другите, води до лесно разбиране на геометричния материал и формиране на трайно знание.

Звучи подходящо избрана музика, персонализираните плочки от различните мозайки - правилен десетоъгълник, правилен петоъгълник, ромб, диамант, папийонка - представят себе си чрез своите свойства – големини на ъгли, оси на симетрия, отношение на дължините на различните си страни: „Аз съм диамант, имам две оси на симетрия, ъглите ми са с големини  $72^\circ$  и  $144^\circ$ , отношението на по-дългата ми страна към по-късата е равно на 1,618...“. „Ние – girih плочките (Фигура 4), можем да се подреждаме и образуваме различни периодични мозайки. А можем ли да образуваме неперодични мозайки?!“ Създалата се творческа обстановка предразполага учениците към развихряне на фантазията и креативността им – подреждат се различни мозайки. Актьорите се състезават, радват се от крайния продукт, творят в сътрудничество.

Ученето чрез театър всъщност е педагогически метод, който развива:

- социални компетентности (себепознание, самооценка, сближаване, работа в екип);
- умствените способности (език, математика, физика, мислене, изобретяване, въображение и т.н.)
- художествени умения (изразяване чрез езика на тялото, импровизации, изпълнение, с други думи - подобаващо отношение към изявяването).

Този тип учене се основава на необходимостта на хората (деца и възрастни):

- да играят;
- да изразят чувства;
- да комуникират с останалата част от групата.



Фигура 4. „Ние сме плочките girih!“



Впечатляващ елемент по време на пърформанса е разнообразието от геометрични фигури, създадени чрез движенията на всички актьори, танцьори и участници в него. След театралните етюди и танците учителите насочват участниците към обобщения и рефлексия.

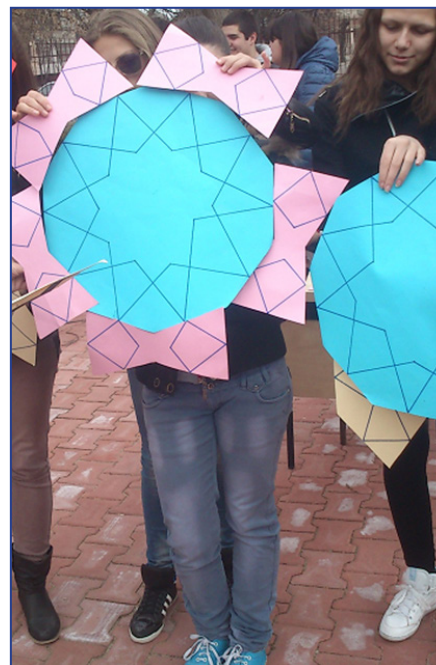
#### 4. Проектът "Tilings in Europe"

Водейки диалозите на математиката с изкуството, достигнахме до необходимостта да споделим наученото за паркетирание на равнина и да го доразвием. Разработихме изследователския проект „Tilings in Europe“ в платформата e-twinning в партньорство с училища от Франция, Румъния, Италия, Гърция, Турция, Белгия и Исландия. В проекта участваха активно около 60 ученика от клуб „Процент и половина“. Дейността се разви в няколко основни направления:

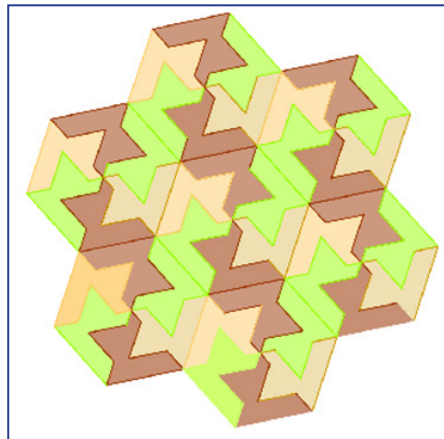
- Изследване и проучване на геометрични модели в облицовките и декоративната украса в архитектурата;
- Систематизация на видовете геометрични модели;
- Разработка на авторски мозайки в динамичната среда *GeoGebra*.

В края на този едногодишен проект се наложи изводът, че в изкуството идеята за хармония се въплъщава във вид на строго разработени геометрични системи.

Защо дейностите с танци, театър и изкуство са стратегия за успешното учене? Общуването с изкуството стимулира усета за инициатива на учениците, води до развитие на тяхното мислене. Чрез повтарящи се движения, танци и игри се изграждат математически компетентности (за моделиране, алгоритмизиране, броене). Използвайки музика и движения, учениците могат да изразят емоциите си, да изразят себе си и едновременно с това да бъдат членове на ансамбъл. Това помага за засилване на емоционалното им развитие, насърчава ги да се научат да правят разлика между фантазия и реалност. Споделената интеграция, която предполага свързване на две дисциплини чрез използване на припокриващи се понятия, успешно може да се извършва от двама учители в екип. Осъществява се и творческа дейност – самостоятелен пренос на знания и умения в нова ситуация.



Фигура 5. Непериодична мозайка



Фигура 6. Динамична мозайка

Организираният *Панаир на природните науки* предостави големи възможности на желаещите ученици да се запознаят с всяка плочка *giri*, с двойките паркетирани плочки от мозайките на Пенроуз, да подредят своята периодична или неперидична мозайка. Звучаха ключови въпроси: „Покажи как?“, „Подайте една папийонка, къде е петогълникът?

Трябва ми един диамант!“ (Фигура 5). В импровизираната *Палата на математиката* всеки имаше възможност да пипне, да усети, да конструира – да паркетира равнината.

Естественото продължение на дейностите по проекта премина през развиване на дигиталната компетентност на учениците.

Те успяха да осъществят динамично паркетирание на равнината с помощта на инструментите на *GeoGebra*, предложиха свои авторски разработки на паркетирани плочки (Фигура 6), а чрез тях - на периодични и неперидични мозайки.

### 5. Заключение

Изучаването на паркетирание на равнината чрез периодични и неперидични мозайки послужи като интригуващ мост между ислямската архитектура от епохата на Средновековието и съвременната епоха. Тази интересна историческа и културна връзка осигури основа за по-нататъшни изследвания и дискусии сред учениците и прерастна в разработката на проект „Диалозите на математиката с изкуството продължават“, с който екипът на клуб „Процент и половина“ спечели Отлична диплома в конференцията „Динамична математика“, 2014 г.

Обобщението на резултатите от проведените анкети с ученици и учители след тези дейности показва, че предложените форми на изучаване на паркетиранието на равнината:

- дават възможност за напредване в конкретните учебни области;
- осигуряват преносимост на знанията и уменията към нови условия;
- развиват ефективни методи на класна и извънкласна работа по математика;
- прилагат модерни методи на преподаване и структура на уроците;
- осигуряват специфичен стил на математическото образование – в изследователски дух;
- изискват гъвкаво съчетание и допълване на знания и педагогическо майсторство и на двамата педагози;
- включват богати възможности за обратна връзка.

Накратко, разглеждането на паркетиранието на равнината като проект, обединяващ математиката и изкуството, е интригуващ и мотивиращ начин за голяма част от учениците. Такъв подход разкрива пред нас нови възможности за изграждане и развиване на различни ключови компетентности у учениците и ги поставя в ролята на експериментатори и творци заедно с нас, техните учители.

### Литература

1. Чехларова, Т., Сендова, Е. (2011) Динамично паркетирание, Математика и информатика, кн. 6, с. 5-18
2. Чехларова, Т., Сендова, Е. (2013) Математическият пърформанс – социална игра или образователна технология, 42 Пролетна математическа конференция на СМБ, С., с. 159-166
3. Tennant, R. F., (2004) Islamic Tilings of the Alhambra Palace: Teaching the Beauty of Mathematics, Teachers, Learners and Curriculum, Vol. 2, pp. 21-25
4. Lu, P. J., Steinhardt, P. J. (2007) Decagonal and Quasicrystalline Tilings in Medieval Islamic Architecture, Science, <http://www.sciencemag.org/content/suppl/2007/02/20/315.5815.1106.DC1/Lu.SOM.pdf> (последно посещение 1.11.2015)
5. Weisstein, E. W. Penrose Tiles. From MathWorld--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/PenroseTiles.html> (последно посещение 1.11.2015)
6. Кендеров, П., Сендова, Е., Чехларова, Т. (2014) Развиване на ключови компетентности чрез образованието по математика: Европейският проект *KeyCoMath*. Математика и математическо образование, т. 43, с. 99–105